амплитудная характеристика

$$\Phi_p = p(\theta)/p(0),$$

фазовая характеристика

$$\alpha(\theta) = \varphi(\theta) - \varphi(0),$$

характеристика направленности по интенсивности

$$\Phi_{\mathscr{J}}(\theta) = \frac{\mathscr{J}(\theta)}{\mathscr{J}(0)} = \Phi_p^2(\theta).$$

8. Коэффициент направленности, или коэффициент осевой концентрации энергии,

$$K = \frac{\mathscr{J}(r, 0)}{\mathscr{J}_{\text{ш}}(r)} = \frac{2}{\int\limits_0^\pi \Phi^2(\theta) \sin\theta \, d\theta}.$$

§ I.3. ПУЛЬСИРУЮЩАЯ СФЕРА

Пульсирующей сферой называют шаровой излучатель, все точки которого колеблются по закону

$$v_n(t) = v_0 e^{j\omega t},$$

где $v_n(t)$ — скорость колебания точек по нормали; $\omega = 2\pi f$ — циклическая частота.

Звуковое поле вокруг сферы определяют волновым уравнением в сферических координатах. Так как для пульсирующей сферы скорость поверхности не зависит от угловых координат, то это уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} \qquad (I.3.1)$$

при граничном условии

$$v_n = \left.\frac{\partial \Psi}{\partial r}\right|_{r=a} = v_0 e^{j\omega t}. \qquad (I.3.2)$$

Как известно [3], частное решение уравнения (I.3.1) имеет вид

$$\Psi = \frac{1}{r}\left(A e^{-j\frac{\omega}{c}r} + B e^{j\frac{\omega}{c}r}\right) e^{j\omega t}.$$

Радиальная составляющая скорости частиц и звуковое давление выражаются формулами

$$\begin{aligned} v &= -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\left\{[A(1+jkr)]\, e^{j(\omega t - kr)} + B(1 - jkr)\, e^{j(\omega t + kr)}\right\}, \\ p &= \frac{j\omega\rho}{r}\left(A e^{-jkr} + B e^{jkr}\right) e^{j\omega t}. \end{aligned} \qquad (I.3.3)$$

Из условий излучения следует, что $B = 0$, а из краевого условия (I.3.2) получаем выражение для A:

$$A = \frac{v_0 a^2}{1 + jka}.$$

Подставляя A и B в формулы (I.3.3), найдем для акустического поля пульсирующей сферы:

$$\Psi = \frac{1}{r}\frac{v_0 a^2}{1 + jka} e^{j(\omega t - kr_1)},$$

$$v = \frac{v_0 a^2}{1 + jka}\frac{1 + jkr}{r^2} e^{j(\omega t - kr_1)}, \qquad (I.3.4)$$

$$p = \frac{v_0 a^2}{1 + jka}\rho\frac{j\omega}{r} e^{j(\omega t - kr_1)},$$

где $r_1 = r - a$.

Приняв фазу скорости v за начальную, получим:

$$v = \frac{v_0 a^2}{\sqrt{1 + k^2 a^2}}\frac{\sqrt{1 + k^2 r^2}}{r^2} e^{j(\omega t - kr_1)},$$

$$p = \frac{v_0 a^2}{\sqrt{1 + k^2 a^2}}\rho c\frac{k}{r} e^{j(\omega t - kr + \varphi)}, \qquad (I.3.5)$$

где φ — фаза, определяемая соотношениями

$$\cos\varphi = \frac{kr}{\sqrt{1 + k^2 r^2}}, \qquad \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 r^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{kr}. \qquad (I.3.6)$$

Интенсивность излучения выражается в виде

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2}\operatorname{Re} p^* v = \frac{1}{2}\frac{v_0^2 a^4}{1 + k^2 a^2}\cdot\frac{\sqrt{1 + k^2 r^2}}{r^3}\rho kc \operatorname{Re} e^{j\varphi} = \frac{v_0^2 a^4}{2(1 + k^2 a^2)}\cdot\frac{\rho ck}{r^2}. \qquad (I.3.7)$$

Величину $v_0 a^2$ принято заменять амплитудой объемной скорости или производительности Q_m источника: $v_0 a^2 = \frac{4\pi a^2 v_0}{4\pi} = \frac{Q_m}{4\pi}$. Оставляя в формулах поля сферического источника только действительные части и заменяя $v_0 a^2$ на объемную скорость Q_m, получаем:

$$v = \frac{Q_m}{4\pi r^2}\sqrt{\frac{1 + k^2 r^2}{1 + k^2 a^2}}\cos(\omega t - kr_1),$$

$$p = \frac{Q_m}{4\pi r^2}\frac{\rho ckr}{\sqrt{1 + k^2 a^2}}\cos(\omega t - kr_1 + \varphi), \qquad (I.3.8)$$

где $Q_m = 4\pi a^2 v_0$; $r_1 = r - a$; φ — угол сдвига фаз между скоростью и давлением в поле на расстоянии r от центра сферы; угол φ определяется формулами (I.3.6).

Для интенсивности излучения пульсирующей сферы имеем

$$\mathcal{J} = \frac{\rho c Q_m^2 k^2}{32\pi^2(1 + k^2 a^2)}\cdot\frac{1}{r^2}. \qquad (I.3.9)$$

Полная мощность излучения пульсирующего шара

$$\mathcal{P} = 4\pi r^2 \mathcal{J} = \frac{\rho c Q_m^2 k^2}{8\pi(1 + k^2 a^2)}. \qquad (I.3.10)$$

Выразим объемную скорость через амплитуду смещения A, волновое число через циклическую частоту ω и представим формулу полной мощности в виде

$$\mathscr{P}=\frac{2\pi\rho a^4}{c\,(1+\omega^2a^2/c^2)}A^2\omega^4. \tag{I.3.11}$$

Для низких частот $\omega^2a^2/c^2 \ll 1$ из (I.3.11) следует

$$\mathscr{P}\approx\frac{2\pi\rho a^4}{c}A^2\omega^4, \tag{I.3.12}$$

т. е. полная мощность излучения пульсирующего шара при низких частотах пропорциональна четвертой степени частоты и квадрату амплитуды.

Для высоких частот $(\omega^2a^2/c^2 \gg 1)$ формула мощности преобразуется:

$$\mathscr{P}\approx 2\pi\rho a^2cA^2\omega^2. \tag{I.3.13}$$

Иначе говоря, полная мощность излучения пульсирующего шара при высоких частотах пропорциональна квадрату частоты и квадрату амплитуды. Эти результаты полностью совпадают с выводами, полученными в § I.1 относительно излучения низких и высоких частот.

Монополь, или точечный источник. Источник волн произвольной формы, создающий ненаправленное излучение, при условии, если длина волны значительно больше линейных размеров источника, называют *монополем*, или *точечным источником*.

Поле точечного источника совпадает с полем пульсирующей сферы малого радиуса. Таким образом, если в формулах поля пульсирующей сферы перейти к пределу, когда $ka\to 0$, то получим *формулы поля точечного источника*:

$$p_0=\lim_{ka\to 0}p_a=\frac{Q_0}{4\pi r^2}\rho ckr\cos(\omega t-kr+\varphi),$$

$$V_0=\lim_{ka\to 0}v_0=\frac{Q_0}{4\pi r^2}\sqrt{1+k^2r^2}\cos(\omega t-kr),$$

$$Q_0=\lim_{ka\to 0}4\pi a^2v_n=\lim_{ka\to 0}4\pi(ka)^2\frac{v_n}{k^2}, \tag{I.3.14}$$

$$\cos\varphi=\frac{kr}{\sqrt{1+k^2r^2}},\quad \sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{1+k^2r^2}}$$

$$\mathscr{I}=\frac{\rho cQ_0^2k^2}{32\pi^2r^2},\quad \mathscr{P}=\frac{\rho cQ_0^2k^2}{8\pi}. \tag{I.3.15}$$

Эти формулы можно получить и не прибегая к формулам пульсирующего шара. Они непосредственно вытекают из общей теории излучения.

Как показано выше, потенциал волнового поля низкочастотного излучателя определяется функцией запаздывания

$$\Psi=\frac{Q\,(t-r/c)}{4\pi r},$$

где Q — производительность источника как функция от $t-r/c$.

Для гармонического установившегося процесса эта функция имеет вид $Q=Q_0\cos(\omega t-kr)$.

Таким образом, потенциал поля точечного источника есть реальная часть комплексной функции

$$\Psi_0 = \frac{Q_0}{4\pi r} e^{j(\omega t - kr)},$$

которая совпадает с предельным выражением функции потенциала сферы (I.3.4) при $ka \to 0$. Отсюда нетрудно получить формулы (I.3.14) и (I.3.15).

Основные характеристики пульсирующей сферы.

1. *Механический импеданс пульсирующей сферы.* В формулу импеданса любого излучателя входят скорость точки приведения, приведенная нормальная составляющая скорости и комплексная амплитуда давления на поверхности сферы. В данном случае точкой приведения является произвольная точка поверхности сферы. Отсюда следует, что безразмерная скорость $\mathbf{D}$ есть единичный вектор нормали элемента поверхности df: $\mathbf{D} = \mathbf{n}$.

Подставляя в общую формулу импеданса (I.2.4) комплексные амплитуды v и p из (I.3.4) при $r = a$, получаем выражение для *механического импеданса пульсирующей сферы*

$$z = \frac{jka}{1 + jka} \rho c S = X + jY.$$

Отделяя действительную часть от мнимой, находим активное и реактивное сопротивления:

$$X = \rho c 4\pi a^2 \frac{k^2 a^2}{1 + k^2 a^2}$$

$$Y = \rho c 4\pi a^2 \frac{ka}{1 + k^2 a^2}. \qquad \text{(I.3.16)}$$

Присоединенная масса пульсирующей сферы

$$M = \frac{Y}{\omega} = \frac{3M_0}{1 + k^2 a^2}, \qquad \text{(I.3.17)}$$

где M_0 — масса жидкости в объеме шара радиусом a.

Для низких частот присоединенная масса, как следует из (I.3.17), равна утроенной массе жидкости, вытесненной шаром.

На рис. I.3.1 представлен график, поясняющий зависимость составляющих X_1 и Y_1 импеданса излучения пульсирующей сферы от отношения диаметра сферы к длине волны в воздухе ($d = 2a$). Для другой среды величины составляющих импеданса, представленные на этом графике, следует умножить на $\rho c/41{,}3$ (ρc — удельное волновое сопротивление среды).

2. *Предельный коэффициент излучения.* Отношение реактивного сопротивления пульсирующей сферы к активному равно

$$\frac{Y}{X} = \frac{1}{ka} = \frac{\lambda}{2\pi a}.$$

Отсюда следует выражение для предельного коэффициента излучения

$$\eta=\frac{1}{1+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\lambda}{2\pi a}}.$$

При $\lambda/a=0{,}1$ значение η близко к единице. С приближением отношения длины волны к радиусу сферы предельный коэффициент излучения медленно уменьшается. Например, для $\lambda/a=100$ он составляет 9%.

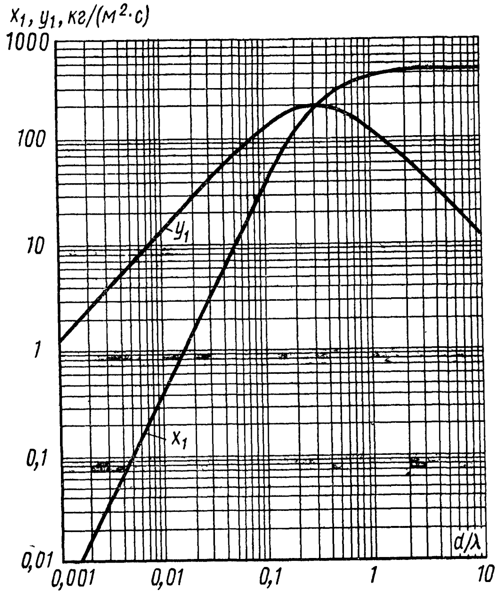

Рис. I.3.1

3. *Поправка к резонансной частоте.* Выведем формулу поправки к резонансной частоте для пульсирующего пузыря в жидкости.

Для воздушного пузыря с упругой оболочкой радиусом a, толщиной h, плотностью ρ_s и упругостью растяжения E резонансная частота пульсирующих колебаний может быть вычислена по приближенной формуле

$$\omega_0\approx\sqrt{\frac{1}{c_a m_a}},$$

где $c_a=\dfrac{V}{\rho c^2\,[1+4Eh/(3\rho ca)]}$ — эффективная акустическая гибкость; $m_a=\dfrac{M_э}{S^2}=\dfrac{\rho a^2}{9V}\,[1+3\rho_s h/(\rho a)]$ — эффективная акустическая масса пузыря.

При условии $4Eh/(3\rho ac)\ll 1$ и $3\rho_s h/(\rho a)\gg 1$ получаем

$$\omega_0\approx\frac{c}{a}\sqrt{\frac{3\rho a}{\rho_s h}}\left(1+\frac{2Eh}{3\rho c^2 a}\right).$$

Если пузырь погружен в жидкость с плотностью ρ_0, то частота собственных колебаний может быть вычислена по формуле (I.2.11), в которой β — поправочный коэффициент к резонансной частоте, причем

$$\beta=\alpha\left[1-\left(\frac{X\alpha}{2m_a\omega_0}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Здесь $\alpha=\left(1+\dfrac{M}{M_э}\right)^{-1/2}$, $M_э$ — эквивалентная масса, $M=\dfrac{3M_0}{1+(\omega_0 a/c_0)^2}\approx$ $\approx 3M_0=4\pi a^3\rho_0$ — присоединенная масса пузыря, $X=4\pi a^2\rho_0 c_0\times$ $\times\dfrac{(\omega_0 a/c_0)^2}{[1+(\omega_0 a/c_0)]^2}\approx 0$ — активная часть импеданса излучения.

После небольших преобразований получаем следующее приближенное выражение для поправочного коэффициента:

$$\beta \approx \alpha \approx \sqrt{\frac{h\rho_s}{a\rho_0}} \left(1 - \frac{h\rho_s}{2a\rho_0} + \frac{a\rho}{6h\rho_s}\right)$$

(ρ — плотность газа, заполняющего пузырь). Например, при $\rho/\rho_s = 0{,}001$; $a/h = 100$; $\rho_s/\rho_0 = 2$ получаем $\beta \approx \alpha = 0{,}14$ и $\omega \approx 0{,}14\omega_0$.

§ I.4. ДВОЙНОЙ ИСТОЧНИК ИЛИ АКУСТИЧЕСКИЙ ДИПОЛЬ

Акустический диполь представляет собой двойной источник, состоящий из двух точечных источников, расположенных близко один от другого и имеющих одинаковые производительности и противоположные фазы. В некоторой точке A пространства каждый точечный источник создает звуковое поле с потенциалами

$$\Psi_+ = \frac{Q}{4\pi r_+} e^{j(\omega t - kr_+)},$$

$$\Psi_- = -\frac{Q}{4\pi r_-} e^{j(\omega t - kr)}.$$

Результирующее поле определяется суммой этих потенциалов:

$$\Psi = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{1}{r_+} e^{-jkr_+} - \frac{1}{r_-} e^{-jkr_-}\right) e^{j\omega t}. \qquad (I.4.1)$$

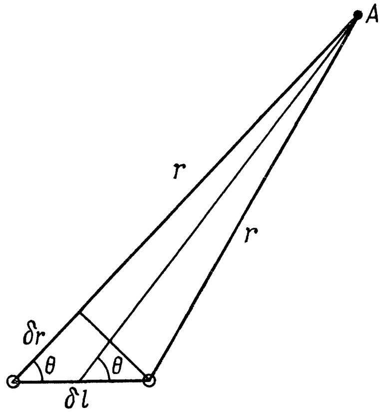

Рис. I.4.1

Поскольку расстояние между точечными источниками диполя очень мало, заменим разность в (I.4.1) полным дифференциалом:

$$\Psi = \frac{Q}{4\pi} d\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) = \frac{Q}{4\pi} \frac{d}{dr}\left(\frac{e^{-jkr}}{r}\right) \frac{d\mathbf{r}}{dl} \delta l e^{j\omega t}.$$

Производная вектора $\mathbf{r}$ по направлению l равна $\cos\theta$ (рис. I.4.1). После дифференцирования получим формулу потенциала скорости в точке A:

$$\Psi = -\frac{B}{4\pi} \frac{jk}{r} \left(1 + \frac{1}{jkr}\right) \cos\theta e^{j(\omega t - kr)}, \qquad (I.4.2)$$

где $B = Q\delta l$ — объемный акустический момент диполя.

Использование обычных соотношений приводит к формулам звукового давления и колебательной скорости диполя. Эти формулы запишем в виде комплексных функций:

$$\begin{aligned} p &= \rho j\omega\Psi = +\rho c \frac{Bk^2}{4\pi r}\left(1 + \frac{1}{jkr}\right) \cos\theta\, e^{j(\omega t - kr)}, \\ v_\theta &= -\frac{\partial\Psi}{r\,\partial\theta} = +\frac{Bjk}{4\pi r^2}\left(1 + \frac{1}{jkr}\right) \sin\theta\, e^{j(\omega t - kr)}, \\ v_r &= -\frac{\partial\Psi}{\partial r} = -\frac{Bk^2}{4\pi r}\left(1 + \frac{2}{jkr} + \frac{2}{(jkr)^2}\right) \cos\theta\, e^{j(\omega t - kr)}. \end{aligned} \qquad (I.4.3)$$