

Для случая $\lambda/(2\pi a) = 1$ значение $\eta \approx 0,5$. При том же значении $\lambda/(2\pi a)$ предельный коэффициент излучения пульсирующей сферы составляет $\approx 0,75$. В общем виде отношение предельных коэффици-

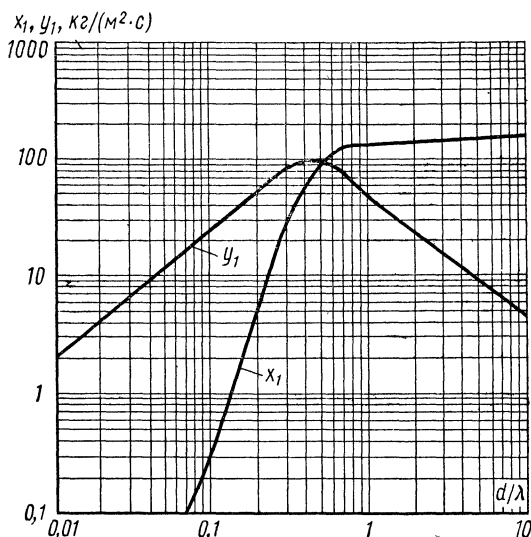


Рис. 1.5.2

ентов излучения осциллирующей и пульсирующей сферических излучателей определяется следующей формулой:

$$\frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1 + \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{2\pi a}}{1 + \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{2\pi a} \left[1 + 2 \left(\frac{\lambda}{2\pi a} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} < 1.$$

Таким образом, осциллирующая сфера энергетически менее эффективна, чем пульсирующая.

§ 1.6. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПРИ СЛОЖНОМ КОЛЕБАНИИ ПОВЕРХНОСТИ СФЕРЫ

Сферический источник может иметь колебания поверхности более сложные, чем пульсирующие или осциллирующие. В результате этих колебаний возникают звуковые волны, характер которых определяется сложными явлениями дифракции и интерференции волн, исходящих от отдельных участков колеблющейся поверхности. Если поверхность излучателя сферическая, то можно получить точное решение задачи, используя классические методы математической физики; оно приведено в приложении III данной книги.

Для сферического источника с осевой симметрией колебаний поверхности потенциал поля выражается в виде ряда [см. формулу (7)

приложения III]:

$$\Psi = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)} \left(\frac{\omega}{c} r \right) P_m(\cos \theta), \quad (I.6.1)$$

где $h_m^{(2)}(z)$ — сферическая функция Ханкеля второго рода m -го порядка; P_m — полином Лежандра m -го порядка.

Радиальную и нормальную составляющие колебательной скорости, вычисленные из соотношения $v_i = -\partial\Psi/\partial l$, представляют выражениями:

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\omega}{c} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{dh_m^{(2)}(z)}{dz} P_m(x), \\ v_\theta &= \frac{\sin \theta}{r} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)}(z) \frac{dP_m}{dx}, \end{aligned} \quad (I.6.2)$$

где ω — частота; c — скорость звука в среде; $z = kr$; $x = \cos \theta$; θ — полярный угол.

Волны давления, определяемые из Ψ по соотношению $p = \rho \frac{\partial\Psi}{\partial t}$, выражают формулой

$$p = j\omega\rho e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)}(z) P_m(x). \quad (I.6.3)$$

Коэффициенты A_m определяются граничными условиями задачи. Рассмотрим некоторые типичные граничные условия.

1. На поверхности излучателя в каждой точке задана нормальная составляющая колебательной скорости

$$v_r(\theta, t) = v(\theta) e^{j\omega t}, \quad (I.6.4)$$

где $v(\theta) = v_0(\theta) e^{j\varphi(\theta)}$ — комплексная амплитуда скорости.

В этом случае граничные условия сводят к соотношению

$$v_r = v(\theta, t) \quad \text{при} \quad r = a,$$

или

$$v(\theta) = -\frac{\omega}{c} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{dh_m}{dz} P_m(\cos \theta) \quad \text{при} \quad z = \frac{\omega}{c} a.$$

Для того чтобы найти коэффициенты A_m , умножим левую и правую части этого уравнения на $P_m(\cos \theta)/(\sin \theta d\theta)$ и проинтегрируем в пределах $0 \leq \theta \leq \pi$:

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi v(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \\ & = -\frac{\omega}{c} \sum_{m=0}^{\infty} A_m \frac{dh_m}{dz} \Big|_{z=\frac{\omega}{c}a} \int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Учитывая свойства ортогональности полиномов Лежандра

$$\int_0^\pi P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \frac{2}{2n+1} & \text{при } m = n, \end{cases}$$

получаем

$$\int v(\theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = -\frac{\omega}{c} A_n \frac{dh_n}{dz} \Big|_{z=\frac{\omega}{c} a} \frac{2}{2n+1},$$

откуда следуют общие формулы для вычисления всех коэффициентов:

$$A_m = -\frac{c}{\omega} \frac{2m+1}{2} \frac{1}{h'_m(z_0)} \int_0^\pi v(\theta) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (1.6.5)$$

где $m=0, 1, 2, \dots$; $z_0 = \omega a/c$; $h'(z_0) = dh(z)/dz$ при $z = z_0$.

2. На некоторой поверхности сферической формы имеется определенное распределение звукового давления, создаваемого источниками звука, расположенными вне области, ограниченной поверхностью. Пусть a — радиус поверхности, давление на этой поверхности $p(a, \theta) e^{j\omega t}$ — функция, заданная определенным образом (в виде таблиц, графиков или аналитической формулы). Тогда согласно непрерывности давления на поверхности сферы ($r=a$)

$$p(\theta, a) = j\omega\rho \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} a\right) P_m(\cos \theta).$$

Как и в первом случае, функцию $p(\theta, a)$ можно рассматривать как разложение по зональным сферическим функциям с коэффициентами разложения

$$B_m = j\omega\rho A_m h_m^{(2)}\left(\frac{\omega}{c} a\right) = \frac{2m+1}{2} \int_0^\pi p(\theta, a) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

поэтому искомые коэффициенты выражают формулой

$$A_m = \frac{2m+1}{j\omega\rho 2h_m^{(2)}(z_0)} \int_0^\pi p(\theta, a) P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta, \quad (1.6.6)$$

где $z_0 = \omega a/c$; $m=0, 1, 2, \dots$

От этих рассуждений можно перейти к общим формулам для пересчета данных измерения звукового давления в ближнем поле для получения параметров дальнего поля.

В установившемся режиме на поверхности сферы, охватывающей антенну, будет существовать определенное распределение амплитуд давлений. Эти амплитуды можно измерить и получить экспериментальную зависимость $p(\omega R/c, \theta)$. Тогда давление в дальнем поле определится из (1.6.3) и (1.6.6) при $z \rightarrow \infty$.

Сферическая функция Ханкеля $h_m^{(2)}(z)$, входящая в общие формулы, и полином Лежандра $P_m(\cos \theta)$ определяются для любого целого m рекуррентными формулами:

$$h_m^{(2)}(z) = j(-1)^m z^m \left(\frac{d}{z dz} \right)^m \frac{e^{-jz}}{z}, \quad (\text{I.6.7})$$

$$P_m(\cos \theta) = \frac{1}{2^m m!} \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} (\cos^2 \theta - 1)^m. \quad (\text{I.6.8})$$

В табл. I.6.1 приведены выражения этих функций для первых трех порядков.

Таблица I.6.1

m	$h_m^{(2)}(z)$	$P_m(\cos \theta)$
0	$j \frac{1}{z} e^{-jz}$	1
1	$j(1+jz) e^{-jz} \frac{1}{z^2}$	$\cos \theta$
2	$j[3(1-jz) - z^2] \frac{1}{z^3} e^{-jz}$	$\frac{1}{2}(3 \cos^2 \theta - 1)$
3	$j[15 - z^2 - 2z^3 + jz(15 - z^3)] \frac{1}{z^4} e^{-jz}$	$\frac{1}{8}(5 \cos 3\theta + 3 \cos \theta)$

Для сферических функций Бесселя $j_m(z)$ и Неймана $n_m(z)$ имеются следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned}
 j_m(z) & \underset{\substack{z \ll 1 \\ z \ll m}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \mathcal{J}_{m+\frac{1}{2}}(z) \approx \frac{z^m}{(2m+1)!!}, \\
 n_m(z) & \underset{\substack{z \ll 1 \\ z \ll m}}{=} \sqrt{\frac{\pi}{2z}} N_{m+\frac{1}{2}}(z) \approx -\frac{(2m-1)!!}{z^{m+1}}, \\
 j_m(z) & \underset{z \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{z} \cos \left[z - \frac{1}{2} \pi(m+1) \right], \\
 n_m(z) & \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{z} \sin \left[z - \frac{1}{2} \pi(m+1) \right].
 \end{aligned} \quad (\text{I.6.9})$$

Для сферической функции Ханкеля второго рода

$$\begin{aligned}
 h_m^{(2)}(z) = j_m(z) - jn_m(z) & \underset{z \ll 1}{\approx} \frac{1}{(2m+1)!!} z^m + j \frac{(2m-1)!!}{z^{m+1}}, \\
 h_m^{(2)}(z) & \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{z} e^{-i \left[z - \frac{1}{2} \pi(m+1) \right]}.
 \end{aligned} \quad (\text{I.6.10})$$

Соотношения (I.6.2) — (I.6.10) позволяют найти точные решения многих задач об излучении звука сферическими источниками.