

§ 1.7. НЕСКОЛЬКО ЗАДАЧ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ СФЕРИЧЕСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

Рассмотрим некоторые частные случаи применения общих формул предыдущего параграфа.

Зональные излучатели различных порядков. Для пульсирующей сферы колебательная скорость поверхности постоянна по амплитуде и фазе. Звуковое поле в этом случае определится формулами (I.6.1) — (I.6.3) с коэффициентами разложения (I.6.5). Подставляя $v(\theta) = v_0$ в (I.6.5), получаем

$$A_m = \frac{2m+1}{2kh'_m(ka)} v_0 \int_0^\pi P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta.$$

Заменяя под знаком интеграла единицу полиномом Лежандра нулевого порядка $P_0(\cos\theta) = 1$ и учитывая условия ортогональности, получим

$$\int_0^\pi P_0(\cos\theta) P_m(\cos\theta) \sin\theta d\theta = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0, \\ 2 & \text{при } m = 0, \end{cases}$$

т. е. $A_0 = v_0/[kh'_0(ka)]$; $A_1 = A_2 = \dots = 0$.

Следовательно, потенциал поля пульсирующей сферы

$$\Psi(r, t) = \frac{v_0 h_0^{(2)}(kr)}{kh_0^{(2)'}(ka)}.$$

Подставляя сюда из (I.6.7) $h'_0(z)$ при $z = ka$ и формулы $h_0^{(2)}(z)$, $h_1^{(2)}(z)$ из табл. I.6.1 при $z = kr$, получим:

$$\Psi = -\frac{\theta}{4\pi(1+jka)} \frac{e^{j[\omega t - k(r-a)]}}{r},$$

$$v_r = -\frac{v_0 a^2}{j+jka} \frac{1+jkr}{r^2} e^{j[\omega t - k(r-a)]},$$

где $Q = 4\pi a^2 v_0$; $k = \omega/c$.

Таким образом, звуковое поле пульсирующей сферы определяется из общего решения (I.6.1) слагаемым нулевого порядка. Точно так же, пользуясь общими формулами, можно показать, что при условии, когда поверхность имеет амплитуду нормальной составляющей скорости $[v(\theta) = v_0 \cos\theta]$, излучение определяется слагаемым первого порядка ($m=1$). Формулы скорости, давления и потенциала будут совпадать с соответствующими формулами осциллирующего шара. Если нормальная составляющая скорости определяется полиномом Лежандра m -го ($m=0, 1, 2, 3, \dots$) порядка $[P_m(\cos\theta)]$, то формулы для звукового поля такого излучателя определяются только слагаемым m -го порядка. Поэтому пульсирующий излучатель называют *излучателем нулевого порядка*, осциллирующий — *излучателем первого порядка* и т. д.

На рис. I.7.1 схематически показаны распределения узлов и пучностей для сферических излучателей первых трех порядков. Нетрудно заметить, что характеристика направленности сферического излучателя m -го порядка представляет зональную сферическую функцию, т. е. полином Лежандра m -го порядка. На рис. I.7.2 изображены характеристики направленности сферических излучателей первых трех порядков.

Излучение частью сферы, совершающей пульсирующие колебания. Разберем случай, когда одна часть сферы с угловым размером $2\theta_0$ совершает пульсирующие

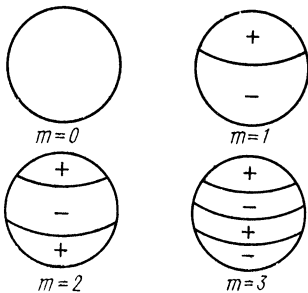


Рис. I.7.1

колебания, а другая остается неподвижной:

$$v(\theta) = \begin{cases} v_0 & \text{при } 0 < \theta < \theta_0, \\ 0 & \text{при } \theta_0 \leq \theta \leq \pi. \end{cases} \quad (1.7.1)$$

Звуковое поле данного излучателя рассчитывают с помощью общих формул

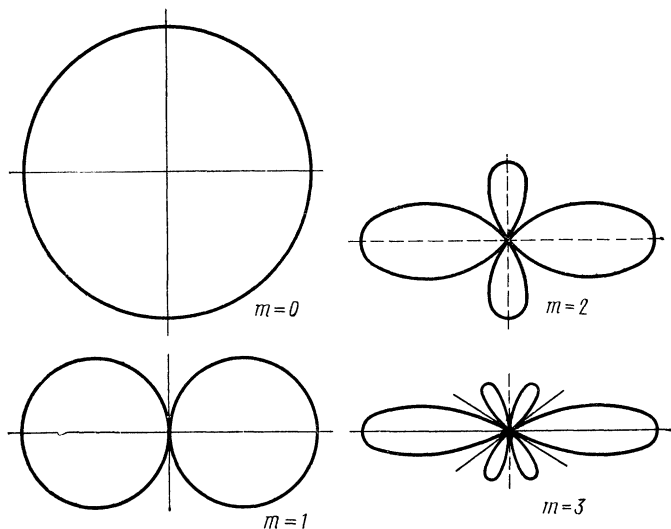


Рис. 1.7.2

(1.6.1) и (1.6.3), где коэффициенты A_m определяются выражениями (1.6.5). В результате подстановки $v(\theta)$ из (1.7.1) получаем

$$A_m = \frac{(2m+1)v_0}{2kh'_m(ka)} \int_0^{\theta_0} P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \quad (1.7.2)$$

Для вычисления интеграла воспользуемся свойствами полиномов Лежандра $P'_{m+1}(x) = P'_{m-1}(x) + (2m+1)P_m(x)$,

откуда

$$\int_a^b P_m(x) dx = \frac{1}{2m+1} \int_a^b [P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x)] dx = \frac{1}{2m+1} [P_{m+1}(b) - P_{m-1}(b)].$$

Таким образом, коэффициенты A_m в данном случае имеют вид

$$A_m = \frac{v_0}{2kh'_m(ka)} [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)] \\ (m=0, 1, 2, \dots).$$

Подставляя их в общие формулы для колебательной скорости (1.6.2) и звукового давления (1.6.3), получаем:

$$v_r = -\frac{v_0}{2} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^{(2)'}(z)}{h_m^{(2)}(z_0)} F_m(x), \quad v_\theta = \frac{v_0}{2} e^{j\omega t} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^{(2)}(z)}{h_m^{(2)'}(z_0)} F'_m(x) \right) \frac{\sqrt{1-x^2}}{z}, \\ \rho = j\rho c \frac{v_0}{2} e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{h_m^{(2)}(z)}{h_m^{(2)'}(z_0)} F_m(x), \quad (1.7.3)$$

где $z = kr$, $z_0 = ka$, $x = \cos \theta$,

$$F_m(x) = [P_{m-1}(x_0) - P_{m+1}(x_0)] P_m(x), \quad x_0 = \cos \theta_0.$$

Для получения зависимостей (1.7.3) в дальней области поля ($z = kz \rightarrow \infty$) воспользуемся асимптотическими выражениями сферических функций Бесселя (1.6.10) и после небольших преобразований запишем формулы дальнего поля в следующем виде:

$$\begin{aligned} v_r &\approx \frac{v_0}{2z} e^{j(\omega t - z)} \sum_{m=0}^{\infty} j^m \frac{F_m(x)}{h_m^{(2)'}(z_0)}, \\ v_\theta &\approx \frac{v_0}{2z^2} e^{j(\omega t - z)} (1 - x^2)^{1/2} \sum_j j^{(m+1)} \frac{F'_m(x)}{h_m^{(2)'}(z_0)}, \\ p &\approx \frac{v_0 \rho c}{2z} e^{j(\omega t - z)} \sum_j j^{m+2} \frac{F_m(x)}{h_m^{(2)'}(z_0)}. \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Формулы (1.7.3) и (1.7.4) полностью характеризуют звуковое поле поршневого излучателя, помещенного на поверхности шара. С их помощью можно вычислить интенсивность в любой точке пространства, импеданс излучения на поверхности преобразователя и функцию направленности.

Из (1.7.4) следует, что функция направленности поршневого излучателя в экране выражается формулой

$$\Phi(\theta) = \frac{\sum [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)] P_m(\cos \theta) \beta_m}{\sum [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)] \beta_m}, \quad (1.7.5)$$

где $\beta_m = j^m (1/h_m^{(2)'}(ka)) = (1/D'_m(ka)) e^{j[\delta'_m(ka) + (1/2)(m+1)\pi]}$; $D'_m(z)$, $\delta'_m(z)$ — первые производные модуля D_m и фазы δ_m сферической функции Бесселя (см. табл. П II.3 приложения).

Формула (1.7.5) может быть применена для вычисления интенсивности излучателя:

$$\mathcal{I}(\theta, ka) = \mathcal{I}(0, ka) [\Phi(\theta)]^2. \quad (1.7.6)$$

На рис. 1.7.3 показаны полярные диаграммы направленности по интенсивности (1.7.6) от θ для $ka = 1, 2, 3$.

Выведем формулу импеданса поршневого излучателя, занимающего часть сферы с угловым размером θ_0 . Сила реакции поля, действующая на кольцевой элемент сферы с угловыми размерами $\theta, \theta + d\theta$,

$$dF = p 2\pi a^2 \sin \theta d\theta,$$

а сила, действующая на часть сферы с угловыми размерами $0, \theta_0$, равна

$$F = \int_0^{\theta_0} 2\pi a^2 p \sin \theta d\theta.$$

Подставим под знак интеграла выражение для звукового давления из (1.7.3) и, заменяя $\sin \theta d\theta$ на $-d \cos \theta$, проведем интегрирование в пределах от 0 до $\cos \theta_0$:

$$F = 4\pi a^2 \rho c v_0 e^{j\omega t} \sin^2(\theta_0/2) (x + jy).$$

Здесь $4\pi a^2 \sin^2(\theta_0/2)$ — площадь колеблющейся части сферы;

$$x = \frac{j m n'_m - n_m j'_m}{4 \sin^2(\theta_0/2) (2m+1) [D'_m(ka)]^2} [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)]^2$$

— активная часть безразмерного удельного импеданса излучения;

$$y = \frac{j m n'_m - n_m j'_m}{4 \sin^2(\theta_0/2) (2m+1) [D'_m(ka)]^2} [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)]^2$$

— реактивная часть импеданса, где $[D'_m(ka)]^2 = [j'_m(ka)]^2 + [n_m(ka)]^2$.

На рис. 1.7.4 изображены графики активной x и реактивной y частей импеданса. На оси X отложены x и y как функции отношения эквивалентного периметра поршня к длине волны $2\lambda a_{\text{пор}}/\lambda = 2ka \sin(\theta_0/2)$. Как видно из этих графиков, для волн с большой длиной волны (по сравнению с периметром поршня $2\lambda a_{\text{пор}}$) активная часть импеданса меньше реактивной. Для коротких волн ($ka \ll 1$) активная часть импеданса равна единице, а реактивная — нулю, так что полный импеданс поршня — действительная величина, равная произведению ρc на площадь поршня: $\lambda a_{\text{пор}}^2 = 4\pi a^2 \sin^2(\theta_0/2)$.

Хотя здесь нельзя привести всех вычислений, тем не менее следует заметить, что в пределе, когда радиус сферы стремится к бесконечности, формулы излучения поршня на сфере переходят в формулы излучения поршня в бесконечном экране.

Точечный источник на поверхности сферы. Рассмотрим частный случай $a_{\text{пор}}/a \ll 1$, когда на поверхности сферы излучает поршневой излучатель, размеры которого значительно меньше, чем ее радиус.

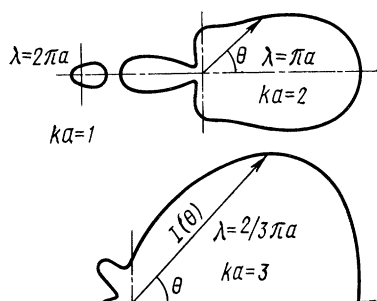


Рис. 1.7.3

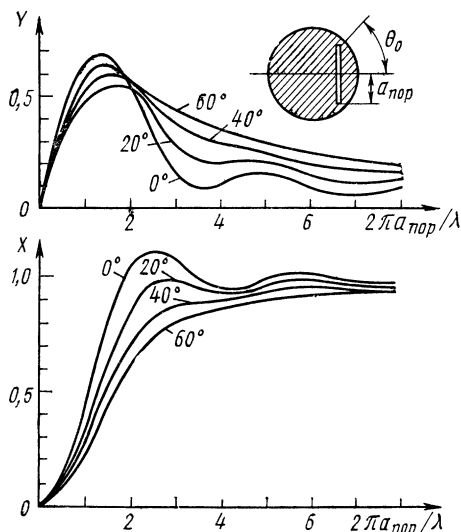


Рис. 1.7.4

Так как отношение $a_{\text{пор}}/a \approx \theta_0 \ll 1$, то во всех формулах $\sin \theta_0 \approx \theta_0$, за счет чего они упрощаются. В частности,

$$P_m(\cos \theta) \approx P_m(\sqrt{1 - \sin^2 \theta_0}) \approx P_m\left(1 - \frac{\theta_0^2}{2}\right) = 1 - P'_m(x) \frac{\theta_0^2}{2} + \dots = 1 - P'_m(x) \frac{\theta_0^2}{2}.$$

Таким образом,

$$P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0) = [P'_{m+1}(x) - P'_{m-1}(x)] \frac{\theta_0^2}{2} = \frac{d}{dx} [P_{m+1}(x) - P_{m-1}(x)] \frac{\theta_0^2}{2}.$$

Кроме того, известно, что

$$\frac{d}{dx} [P_{m+1}(x) - P_{m-1}(x)] = (2m+1) P_m(x),$$

поэтому

$$P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0) \approx (2m+1) \frac{\theta_0^2}{2} P_m(x) \quad (x \rightarrow 1).$$

Так как $P_m(x) \rightarrow 1$, то

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow 0} [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)] = (2m+1) \frac{\theta_0^2}{2}.$$

С учетом этих замечаний получаем формулы для излучения точечного источника, расположенного на поверхности сферы:

$$r_r = -\frac{v_0 \theta_0^2}{4} \sum_m \frac{D'_m(kr)}{D'_m(ka)} e^{j[\omega t - \delta_m(kr) + \delta'_m(ka)]} (2m+1) P_m(\theta),$$

$$p = j\rho c \frac{v_0 \theta_0^2}{4} \sum_m (2m+1) \frac{D_m(kr)}{D'_m(ka)} e^{j[\omega t - \delta_m(kr) + \delta'_m(ka)]} P_m(\theta).$$

Тогда фактор направленности

$$\Phi(\theta) = \frac{\sum (2m+1) P_m(\cos \theta) \beta_m}{\sum (2m+1) \beta_m},$$

где $\beta_m = \frac{\exp j[\delta_m(ka) + \pi(m+1)/2]}{D'_m(ka)}$.

Точно так же получают формулы для импеданса точечного излучателя, расположенного на поверхности сферы:

$$x = \frac{\theta_0^2}{4} \frac{1}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{[D'_m(ka)]^2};$$

$$y = \frac{\theta_0^2}{4} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_m(ka)}{D'_m(ka)} \cos[\delta_m(ka) - \delta'_m(ka)].$$

В акустике существует положение, сформулированное Гельмгольцем и названное теоремой взаимности: если в пространстве, где имеются отражающие и поглощающие тела, расположить точечный излучатель и измерить с помощью приемника сигнал в некоторой точке пространства, то при взаимной замене мест приемника и точечного излучателя сигналы, которые зарегистрирует приемник звука при прежней мощности излучателя, останутся прежними.

Эта теорема позволяет рассчитать дифракцию на телах, для которых удастся вычислить излучение точечного источника, находящегося на поверхности.

В частности, известно, что точечный источник, расположенный на поверхности сферы, создает давление в бесконечно удаленной точке, определяемой формулой

$$p(\theta) = p_0 \Phi(\theta),$$

где p_0 — давление в направлении $\theta=0$; $\Phi(\theta)$ — функция направленности по давлению.

Если поместить точечный источник в бесконечно удаленную точку, а приемник давления — на поверхность сферы, то давление, которое он будет воспринимать, равно $p_0 \Phi_0$ [p_0 — давление, которое могло бы быть зарегистрировано при $\theta=0$; $\Phi(\theta)$ — функция направленности точечного источника, расположенного на поверхности сферы].

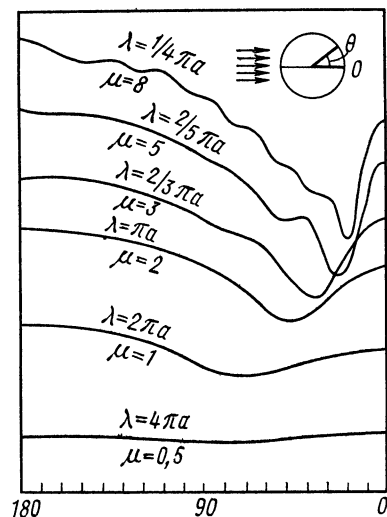


Рис. 1.7.5

На рис. 1.7.5 показаны графики распределения интенсивности звука вокруг сферы, на которую падает плоская волна. Направления распространения волны и полярный угол θ изображены справа сверху рисунка. Различные кривые даны для различных значений волнового фактора μ . Как видно, чем выше частота, тем больше проявляется неравномерность звукового поля на поверхности сферы. При очень высоких частотах часть шара, расположенная в области геометрической тени, не охвачена волновым процессом.