

ГЛАВА II

ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ИСТОЧНИКИ

§ II.1. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ ИЗЛУЧАТЕЛЬ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Для анализа поля, создаваемого цилиндрическими системами, исследуем излучение цилиндра бесконечной длины. Пусть на его жесткой поверхности расположены источники звука, имеющие нормальную составляющую скорости, амплитуда которой зависит от азимута φ и не зависит от координаты z :

$$v_n = v_0(\varphi) e^{j\omega t}. \quad (\text{II.1.1})$$

Поскольку колебательная скорость на поверхности цилиндра имеет гармоническую зависимость от времени и не зависит от координаты, то и потенциал скорости определяется гармонической функцией времени и не зависит от z :

$$\Psi(r, \varphi, z, t) = \psi(r, \varphi) e^{j\omega t}. \quad (\text{II.1.2})$$

Подставляя (II.1.2) в волновое уравнение

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0,$$

получаем уравнение для амплитуды потенциала

$$\Delta \psi(r, \varphi) + k^2 \psi(r, \varphi) = 0, \quad (\text{II.1.3})$$

где оператор Лапласа в цилиндрических координатах имеет вид

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}. \quad (\text{II.1.4})$$

Полагая $\psi(r, \varphi) = \Phi(\varphi) R(r)$, получаем расщепление (II.1.3) на два уравнения:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi &= 0, \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right) R &= 0. \end{aligned} \quad (\text{II.1.5})$$

Первое из них имеет однозначное решение при целом m :

$$\Phi(\varphi) = A \cos(m\varphi + \alpha), \quad (\text{II.1.6})$$

а второе при введении новой переменной $x = kr$ легко преобразовать в уравнение Бесселя с целочисленным параметром m :

$$\frac{d^2 R(x)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR(x)}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R(x) = 0. \quad (\text{II.1.7})$$

Как известно, решениями уравнения Бесселя являются цилиндрические функции. В данном случае удобно взять комплексные цилинд-

рические функции Ханкеля первого и второго рода:

$$H_m^{(1)}(x) = \mathcal{J}_m(x) + jN_m(x),$$

$$H_m^{(2)}(x) = \mathcal{J}_m(x) - jN_m(x)$$

и представить решение уравнения (II.1.7) в виде

$$R_m(kr) = A_m H_m^{(1)}(kr) + B_m H_m^{(2)}(kr). \quad (\text{II.1.8})$$

Из функций $H_m^{(1)}$ и $H_m^{(2)}$ при временной зависимости потенциала скорости вида $e^{j\omega t}$ условию излучения удовлетворяет лишь $H_m^{(2)}$. Поэтому для задач об излучении волн в (II.1.8) оставим второе слагаемое

$$R_m(kr) = B_m H_m^{(2)}(kr). \quad (\text{II.1.9})$$

Таким образом, частное решение поставленной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} \Psi(r, \varphi, t) &= A_m \cos(m\varphi + \alpha_m) H_m^{(2)}(kr) e^{j\omega t} = \\ &= (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi) H_m^{(2)}(kr) e^{j\omega t}, \end{aligned} \quad (\text{II.1.10})$$

где $A'_m = A_m \cos \alpha_m$; $B'_m = A_m \sin \alpha_m$.

Из функции (II.1.10) составим общее решение:

$$\Psi(r, \varphi, t) = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi) H_m^{(2)}(kr). \quad (\text{II.1.11})$$

Ниже вместо $H_m^{(2)}$ будем писать H_m .

Радиальная скорость и звуковое давление связаны с потенциалом скорости Ψ известными соотношениями

$$v_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r}, \quad p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} = j\omega \rho \Psi,$$

откуда

$$v_r = -k e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dH}{dx} (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi), \quad (\text{II.1.12})$$

$$p = j\omega \rho \sum_{m=0}^{\infty} H_m(x) (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi) e^{j\omega t}. \quad (\text{II.1.13})$$

Постоянные A'_m и B'_m определяют с использованием условий на границе.

Пульсирующий цилиндр. Определим звуковое поле и характеристики излучателя, если поверхность цилиндра имеет колебательную радиальную скорость $v_n = v_0 e^{j\omega t}$ (v_0 — амплитуда скорости на поверхности цилиндра, не зависящая от азимута φ и координаты z).

Используем решение волнового уравнения в форме (II.1.12) и применим к нему условие непрерывности радиальной составляющей скорости на поверхности цилиндра.

Очевидно, если в (II.1.12) подставить $r = a$ (a — радиус цилиндра), то должно удовлетворяться тождественное равенство радиальной скорости v_n на поверхности цилиндра и радиальной составляющей колебательной скорости v_r звукового поля. Сокращая на общий множи-

тель $e^{j\omega t}$, получаем

$$v_0 \equiv -k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{dH_m}{dx} \Big|_{x=ka} (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi).$$

Это тождество выполняется, если $A'_m = B'_m = 0$ при $m \neq 0$ и $A'_m \neq 0$ при $m = 0$:

$$v_0 \equiv -k \frac{dH_0}{dx} \Big|_{x=ka} A'_0.$$

Отсюда

$$A'_0 = -\frac{v_0}{k \frac{dH_0}{dx} \Big|_{x=ka}} = -\frac{v_0}{kH'_0(ka)}; \quad A'_m = B'_m = 0 \text{ при } m \neq 0. \quad (\text{II.1.14})$$

Таким образом, акустическое поле пульсирующего цилиндра выражается формулами:

$$\begin{aligned} \Psi &= -\frac{v_0 H_0(kr)}{kH'_0(kr)} e^{j\omega t}, \\ v_r &= \frac{v_0}{H'_0(ka)} H_0(kr) e^{j\omega t}, \\ p &= -j\rho c \frac{v_0}{H'_0(ka)} H_0(kr) e^{j\omega t}. \end{aligned} \quad (\text{II.1.15})$$

Запишем формулы (II.1.15) для дальнего поля ($r \rightarrow \infty$) и проанализируем их в случае низких и высоких частот. Кроме того, поскольку для вычисления импеданса требуется знать силу реакции поля на поверхности цилиндра, необходимо найти также выражение для давления при $kr = ka$.

С этой целью воспользуемся следующими соотношениями для цилиндрических функций [5].

Цилиндрическая функция Ханкеля нулевого порядка второго рода определяется рядом

$$\begin{aligned} H_0^{(2)}(x) &= \mathcal{J}_0(x) - jN_0(x) = \mathcal{J}_0(x) - j \frac{2}{\pi} \times \\ &\times \left[\left(\ln \frac{x}{2} + C \right) \mathcal{J}_0(x) + 2\mathcal{J}_2(x) - \frac{1}{2} \mathcal{J}_4(x) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Здесь $\mathcal{J}_0(x)$ и $N_0(x)$ — функции Бесселя и Неймана нулевого порядка:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_0(x) &= 1 - \frac{(x/2)^2}{(1!)^2} + \frac{(x/2)^4}{(2!)^2} - \frac{(x/2)^6}{(3!)^2} + \dots; \\ N_0(x) &= \frac{2}{\pi} \left[\left(\ln \frac{x}{2} + c \right) \mathcal{J}_0(x) + 2\mathcal{J}_2(x) + \frac{2}{2} \mathcal{J}_4(x) + \dots \right]; \end{aligned}$$

$$C = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=0}^m \frac{1}{k} - \ln m \right) \approx 0,577216 \dots$$

Функция Бесселя m -го порядка определяется с помощью рекуррентных формул:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1(x) &= -\frac{d}{dx} \mathcal{J}_0(x); \\ \mathcal{J}_{m+1}(x) &= \frac{2n}{x} \mathcal{J}_m(x) - \mathcal{J}_{m-1}(x) = -x^m \frac{d}{dx} (x^{-m} \mathcal{J}_m(x)), \end{aligned}$$

Предельные выражения функций Ханкеля при $x \gg 1$ и $x \ll 1$ имеют следующий вид:

$$H_0^{(2)}(x) \underset{x \ll 1}{\approx} j \sqrt{1 + \left(\frac{2}{\pi} \ln x\right)^2} e^{j \frac{\pi}{2 \ln x}} \approx j \frac{2}{\pi} \ln x e^{j \frac{\pi}{2} \frac{1}{\ln x}},$$

$$\frac{dH_0^{(2)}(x)}{dx} \underset{x \ll 1}{\approx} -j \frac{2}{\pi x} e^{j \frac{\pi}{2 \ln x}},$$

$$H_0^{(2)}(x) \underset{x \gg 1}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}, \quad \frac{dH_0^{(2)}(x)}{dx} \underset{x \gg 1}{\approx} -j \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j \left(x - \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Подставляя асимптотические значения $H_0^{(2)}$ и $H_0^{(1)}$ в (II.1.15), находим формулы акустического дальнего поля пульсирующего цилиндра:

$$\Psi \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -\frac{v_0 \sqrt{2/(\pi ka)}}{k H_0'(ka)} \sqrt{a/r} e^{j(\omega t - kr) + j \frac{\pi}{4}},$$

$$v \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -j \frac{v_0 \sqrt{2/(\pi ka)}}{H_0'(ka)} \sqrt{a/r} e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{4})}, \quad (II.1.16)$$

$$p \underset{r \rightarrow \infty}{\approx} -j \rho c \frac{v_0 \sqrt{2/(\pi ka)}}{H_0'(ka)} \sqrt{a/r} e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{4})}.$$

Интенсивность излучения можно представить как реальную часть половины произведения комплексно-сопряженных функций давления и колебательной скорости:

$$\mathcal{I} \approx \frac{\rho c v_0^2}{\pi ka |H_0'(ka)|^2} \frac{a}{r}. \quad (II.1.17)$$

Следовательно, интенсивность пульсирующего цилиндра на больших расстояниях ($kr \gg 1$) изменяется обратно пропорционально расстоянию.

Полная мощность излучения на единицу длины пульсирующего цилиндра

$$\mathcal{P}_l = \mathcal{I} 2\pi r = \frac{2\rho c v_0^2}{k |H_0'(ka)|^2}.$$

Для высоких частот формулы поля (II.1.16) и (II.1.17) легко приводят с помощью асимптотических свойств цилиндрических функций к виду:

$$\Psi \underset{\substack{r \rightarrow \infty \\ ka \gg 1}}{\approx} \frac{jv_0}{k} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j[\omega t - k(r-a)]},$$

$$v \underset{\substack{r \rightarrow \infty \\ ka \gg 1}}{\approx} -v_0 \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j[\omega t - k(r-a)]},$$

$$p \underset{\substack{r \rightarrow \infty \\ ka \gg 1}}{\approx} -v_0 \rho c \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j[\omega t - k(r-a)]}, \quad (II.1.18)$$

$$\mathcal{I} \underset{\substack{r \rightarrow \infty \\ ka \gg 1}}{\approx} \frac{1}{2} \rho c v_0^2 \frac{a}{r},$$

$$\mathcal{P} \underset{ka \gg 1}{\approx} \rho c v_0^2 \pi a.$$

Для низкочастотного пульсирующего цилиндра акустическое поле определяется выражениями:

$$\begin{aligned} \Psi &\approx \frac{v_0}{kj} \sqrt{\frac{\pi ka}{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{4})}, \\ v_r &\approx v_0 \sqrt{\frac{\pi ka}{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{4})}, \\ p &\approx v_0 \rho c \sqrt{\frac{\pi ka}{2}} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j(\omega t - kr + \frac{\pi}{4})}, \\ \mathcal{I} &\approx \rho c v_0^2 \frac{\pi ka}{4} \frac{a}{r}, \\ \mathcal{P} &\approx \frac{\rho c v_0^2}{2} \pi^2 a k a. \end{aligned} \quad (\text{II.1.19})$$

Сравнивая (II.1.18) и (II.1.19), приходим к заключению, что акустическая мощность цилиндрического источника при излучении им высоких частот не зависит от частоты и определяется волновым сопротивлением среды и амплитудой колебательной скорости. Если же пульсирующий цилиндр работает на низких частотах, то полная акустическая мощность, излучаемая им, пропорциональна не только волновому сопротивлению, но и произведению волнового числа на радиус цилиндра, т. е. величине, значительно меньшей единицы.

Рассмотрим импеданс пульсирующего цилиндра. Согласно определению, $z = F/v_r$ ($F = 2\pi a r c (ka) = -2\pi a j \rho c \frac{v_0 H_0(ka) e^{j\omega t}}{H'_0(ka)}$ — сила реакции поля на единицу длины цилиндра).

Следовательно,

$$\begin{aligned} z &= -\frac{2\pi a j \rho c H_0(ka) e^{j\omega t} v_0}{v_0 H'_0(ka) e^{j\omega t}} = -2\pi a \rho c j \frac{H_0(ka)}{H'_0(ka)} = \\ &= -2\pi a \rho c j \frac{\mathcal{I}_0 - jN_0}{\mathcal{I}'_0 - jN'_0} = \rho c s_1 (x + jy), \end{aligned}$$

где $\rho c x = \rho c \frac{\mathcal{I}_0 N'_0 - N_0 \mathcal{I}'_0}{(\mathcal{I}'_0)^2 + (N'_0)^2}$ — активная часть импеданса, приведенного к единице поверхности цилиндра: $\rho c y = -\rho c \frac{\mathcal{I}_0 \mathcal{I}'_0 + N_0 N'_0}{(\mathcal{I}'_0)^2 - (N'_0)^2}$ — реактивная часть.

Импеданс цилиндра конечной длины, заключенного между двумя бесконечно длинными насадками того же диаметра, вычисляется по более сложным формулам [28], согласно которым импеданс цилиндра высотой b равен

$$\frac{z}{s} = \frac{z_\infty}{s} z_b^*,$$

где $z_\infty/s = \rho c [h(ka) + jg(ka)]$; $z_b^* = [h^*(kb) + jg^*(kb)]$, a — радиус.

Функции $h(y)$ и $g(y)$ имеют вид:

$$h(y) = \frac{2}{\pi y [\mathcal{I}_0^2(y) - N_1^2(y)]},$$

$$g(y) = \frac{\mathcal{I}_0(y) \mathcal{I}_1(y) + N_0(y) N_1(y)}{\mathcal{I}_1^2(y) + N_1^2(y)}.$$

Функции $h^*(z)$ и $g^*(z)$ представлены в форме рядов:

$$h^*(z) = \frac{z}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(n+1)(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$$g^*(z) = \frac{z}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\varphi(n) - \ln \frac{z}{2}}{(2n+1)(n+1)(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

где $\varphi(n) = -0,57723 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \frac{4n+3}{4n+2}$.

Предельные значения этих функций:

$$h(y) \underset{y \rightarrow 0}{\approx} \frac{\pi}{4} y, \quad g(y) \underset{y \geq 0}{\approx} -y \ln y,$$

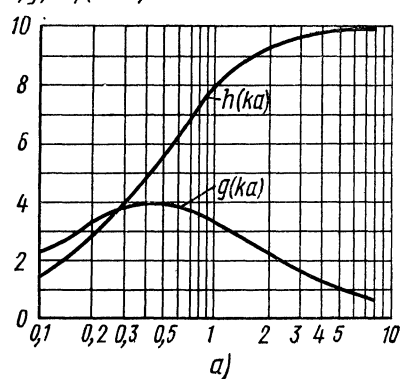
$$h(y) \underset{y \rightarrow \infty}{\approx} 1, \quad g(y) \underset{y \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2y} \rightarrow 0,$$

$$h^*(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} \frac{z}{2}, \quad g^*(z) \underset{z \rightarrow 0}{\approx} -\frac{z_0}{\pi} \ln z,$$

$$h^*(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} 1, \quad g^*(z) \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} 0.$$

Нетрудно видеть, что формула импеданса ограниченного цилиндра при $z \rightarrow \infty$ переходит в формулу импеданса бесконечного цилиндра.

$h, g, \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$



$h^*, g^*, \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с})$

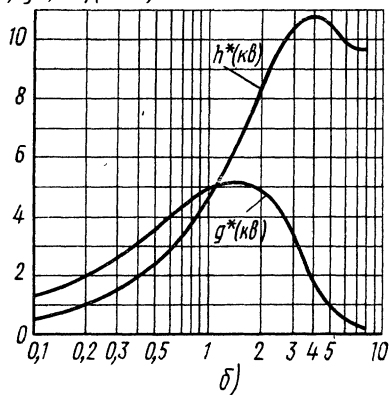


Рис. II.1.1

На рис. II.1.1, а представлены кривые $h(ka)$, $g(ka)$, а на рис. II.1.1, б — $h^*(kb)$ и $g^*(kb)$, с помощью которых можно найти

для известных ka и kb активное и реактивное удельные сопротивления:

$$\begin{aligned}x_1 &= \rho c [h(ka) h^*(kb) - g(ka) g^*(kb)], \\y_1 &= \rho c [h(ka) g^*(kb) + g(ka) h^*(kb)].\end{aligned}$$

§ II.2. ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ЦИЛИНДР

Осциллирующий цилиндр представляет собой круглый стержень, колеблющийся в направлении, перпендикулярном оси, с некоторой частотой f . Радиальная составляющая скорости на поверхности цилиндра $v = v_0 \cos \varphi e^{j2\pi f t}$ (φ — азимут образующей).

Из условия непрерывности нормальной составляющей скорости звукового поля получаем следующие значения постоянных A'_m и B'_m решения (II.1.11):

$$A'_1 = -\frac{v_0 \cos \varphi}{kH'_1(ka)}, \quad A_m = 0, \quad m \neq 1, \quad B_m = 0.$$

Отсюда потенциал звукового поля осциллирующего цилиндра

$$\Psi = -\frac{v_0 H_1(kr)}{kH'_1(ka)} \cos \varphi e^{j\omega t}. \quad (\text{II.2.1})$$

Используя выражение для потенциала поля, находим радиальную и тангенциальную составляющие колебательной скорости:

$$v_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{v_0 H'_1(kr)}{H'_1(ka)} \cos \varphi e^{j\omega t}, \quad (\text{II.2.2})$$

$$v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{r \partial \varphi} = -\frac{v_0 H_1(kr)}{kr H'_1(ka)} \sin \varphi e^{j\omega t}. \quad (\text{II.2.3})$$

Звуковое давление определяют по формуле $p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t}$, откуда

$$p = -j\omega \rho \frac{v_0 H_1(kr)}{kH'_1(ka)} \cos \varphi e^{j\omega t}. \quad (\text{II.2.4})$$

Воспользуемся предельными значениями функции Ханкеля первого порядка:

$$\begin{aligned}H_1^{(2)}(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\approx} \frac{2j}{\pi x}, \quad \frac{dH_1^{(2)}}{dx} \underset{x \rightarrow 0}{\approx} = \frac{2j}{\pi x^2}, \\H_1^{(2)}(x) &\sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)}, \\ \frac{dH_1^{(2)}(x)}{dx} &\approx -j \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)}\end{aligned} \quad (\text{II.2.5})$$

и найдем потенциал низкочастотного ($ka \ll 1$) осциллирующего цилиндра в областях ближнего ($kr \rightarrow 0$) и дальнего ($kr \rightarrow \infty$) поля:

$$\Psi \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \rightarrow ka}}{\approx} v_0 a^2 \frac{\cos \varphi}{r} e^{j\omega t}, \quad (\text{II.2.6})$$

$$\Psi \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \rightarrow \infty}}{\approx} -j\pi a^2 v_0 \sqrt{\frac{f}{cr}} \cos \varphi e^{j\left(\omega t - kr + \frac{3}{4}\pi\right)}. \quad (\text{II.2.7})$$