для известных ka и kb активное и реактивное удельные сопротивления:

$$x_1 = \rho c [h(ka) h^*(kb) - g(ka) g^*(kb)],$$
$$y_1 = \rho c [h(ka) g^*(kb) + g(ka) h^*(kb)].$$

§ II.2. ОСЦИЛЛИРУЮЩИЙ ЦИЛИНДР

Осциллирующий цилиндр представляет собой круглый стержень, колеблющийся в направлении, перпендикулярном оси, с некоторой частотой f. Радиальная составляющая скорости на поверхности цилиндра $v = v_0 \cos \varphi e^{j2\pi ft}$ (φ — азимут образующей).

Из условия непрерывности нормальной составляющей скорости звукового поля получаем следующие значения постоянных A'_m и B'_m решения (II.1.11):

$$A'_1 = -\frac{v_0 \cos \varphi}{kH'_1(ka)}, \quad A_m = 0, \; m \neq 1, \; B_m = 0.$$

Отсюда потенциал звукового поля осциллирующего цилиндра

$$\Psi = -\frac{v_0 H_1(kr)}{kH'_1(ka)} \cos \varphi e^{j\omega t}. \qquad (II.2.1)$$

Используя выражение для потенциала поля, находим радиальную и тангенциальную составляющие колебательной скорости:

$$v_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} = \frac{v_0 H'_1(kr)}{H'_1(ka)} \cos \varphi e^{j\omega t}, \qquad (II.2.2)$$

$$v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{r \partial \varphi} = -\frac{v_0 H_1(kr)}{krH'_1(ka)} \sin \varphi e^{j\omega t}. \qquad (II.2.3)$$

Звуковое давление определяют по формуле $p = \rho \frac{\partial \psi}{\partial t}$, откуда

$$p = -j\omega\rho \frac{v_0 H_1(kr)}{kH'_1(ka)} \cos \varphi e^{j\omega t}. \qquad (II.2.4)$$

Воспользуемся предельными значениями функции Ханкеля первого порядка:

$$H_1^{(2)}(x) \underset{x \to 0}{\approx} \frac{2j}{\pi x}, \quad \frac{dH_1^{(2)}}{dx} \underset{x \to 0}{\approx} = \frac{2j}{\pi x^2},$$

$$H_1^{(2)}(x) \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{j-\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)}, \qquad (II.2.5)$$

$$\frac{dH_1^{(2)}(x)}{dx} \approx -j \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-j\left(x - \frac{3}{4}\pi\right)}$$

и найдем потенциал низкочастотного ($ka \ll 1$) осциллирующего цилиндра в областях ближнего ($kr \to 0$) и дальнего ($kr \to \infty$) поля:

$$\Psi \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \to ka}}{\approx} v_0 a^2 \frac{\cos \varphi}{r} e^{j\omega t}, \qquad (II.2.6)$$

$$\Psi \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \to \infty}}{\approx} -j\pi a^2 v_0 \sqrt{\frac{f}{cr}} \cos \varphi e^{j\left(\omega t - kr + \frac{3}{4}\pi\right)}. \qquad (II.2.7)$$

Звуковое давление в ближнем и дальнем поле получаем при $ka \ll 1$:

$$p \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \to ka}}{\approx} 2\pi f \rho \frac{a^2 \cos\varphi}{r} e^{j(\omega t + \pi/2)},$$
$$p \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \to \infty}}{=} \pi \omega \rho v_0 \sqrt{\frac{f}{cr}} \cos\varphi e^{j\left(\omega t - kr + \frac{3\pi}{4}\right)}. \qquad \text{(II.2.8)}$$

При этом радиальная и тангенциальная составляющие скорости имеют вид:

$$v_r = -\frac{\partial \Psi}{\partial r} \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \to ka}}{\approx} v_0 a^2 \frac{\cos\varphi}{r^2} e^{j\omega t},$$
$$v_\varphi = -\frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \underset{\substack{ka \ll 1 \\ kr \to ka}}{\approx} v_0 a^2 \frac{\sin\varphi}{r^2} e^{j\omega t},$$
$$v_r \approx 2\pi^2 a^2 v_0 f \rho \sqrt{\frac{f}{cr}} \cos\varphi e^{j\left(\omega t - kr + \frac{3}{4}\pi\right)}.$$

Тангенциальная составляющая скорости на больших расстояниях убывает как $1/(r\sqrt{r})$, поэтому ею можно пренебречь.

Поток мощности, приходящийся на единицу площади фронта волны, равен произведению комплексно-сопряженных p и v_2, а интенсивность $\mathscr{I}$ периодической волны — среднему его значению за период. Для низкочастотного осциллирующего цилиндра интенсивность равна

$$\mathscr{I} = \frac{1}{T} \int_t^{T+t} p^* v_2 \, d\tau = \frac{2\pi^4 f^3 \rho a^4 v_0^2}{c^2 r} \cos^2\varphi.$$

Мощность излучения, приходящаяся на единицу длины цилиндра, выражается формулой

$$\mathscr{P}_l = \int_{-\pi}^{+\pi} \mathscr{I} r \, d\varphi = \frac{2\pi^4 f^3 \rho a^4 v_0^2}{c^2} \int_0^{2\pi} \cos^2\varphi \, d\varphi = \frac{2\pi^5 f^3 \rho a^4 v_0^2}{c^2}.$$

Сила реакции поля на единицу длины цилиндра в направлении движения равна

$$F_l = \int_0^{2\pi} p \cos\varphi \, d\varphi = j 2\pi f \rho a v_0 \int_0^{2\pi} \cos\varphi \cos\varphi a \, d\varphi = j\pi f \rho a^2 v_0 2\pi.$$

Отсюда получаем импеданс единицы длины цилиндра при низких частотах:

$$z_ц = \frac{F_l}{v} = j\pi f \rho a^2 2\pi \approx j\omega (\rho \pi a^2). \qquad \text{(II.2.9)}$$

Импеданс имеет инерционный характер. Активная часть импеданса мала и в формулу (II.2.9) не входит. Однако если воспользоваться формулой $\mathscr{P}_l = x v_0^2/2$, то получим активное сопротивление при низких частотах:

$$x = \frac{2\mathscr{P}_l}{v_0^2} = \frac{\pi^2 \omega^2 \rho a^4}{2c^2}. \qquad \text{(II.2.10)}$$

Таким образом, низкочастотный полный импеданс осциллирующего цилиндра кроме реактивной части (II.2.9) содержит еще активную часть (II.2.10):

$$z \underset{ka \ll 1}{\approx} \frac{\pi^2\omega^3\rho a^4}{2c^2} + j\omega(\pi a^2\rho).$$

§ II.3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ЦИЛИНДРОМ

Если поверхность длинного цилиндра колеблется так, что амплитуда скорости его поверхности зависит от азимута φ по закону $v_a = v_0(\varphi)$, то имеем только те члены решения (II.1.11), которые удовлетворяют граничному условию

$$v_0(\varphi) = -k \sum_{m=0}^{\infty} H'_m(ka)(A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi). \qquad \text{(II.3.1)}$$

Рассматривая (II.3.1) как тригонометрический ряд Фурье, получаем:

$$A'_0 = -\frac{1}{2k\pi H'_0(ka)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi)\, d\varphi,$$

$$A'_m = -\frac{1}{k\pi H'_m(ka)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) \cos m\varphi\, d\varphi, \qquad \text{(II.3.2)}$$

$$B'_m = -\frac{1}{k\pi H'_m(ka)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) \sin \varphi\, d\varphi$$

$$(m = 1, 2, 3, \ldots).$$

Потенциал поля цилиндрического источника представляем как

$$\Psi(r, \varphi, t) = e^{j\omega t}\Big[A'_0 H_0^{(2)}(kr) +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi) H_m^{(2)}(kr)\Big], \qquad \text{(II.3.3)}$$

где A'_0, A'_m и B'_m — коэффициенты, определяемые по формулам (II.3.2).

Рассмотрим несколько частных случаев.

Излучение пульсирующей линии. Предположим, что радиальная скорость поверхности цилиндра равна

$$v_a = \begin{cases} v_0 & \text{при} \quad \varphi \leqslant \left|\frac{\Delta\alpha}{2}\right|, \\ 0 & \text{при} \quad \varphi > \left|\frac{\Delta\alpha}{2}\right|. \end{cases}$$