

Таким образом, низкочастотный полный импеданс осциллирующего цилиндра кроме реактивной части (II.2.9) содержит еще активную часть (II.2.10):

$$z \underset{ka \ll 1}{\approx} \frac{\pi^2 \omega^3 \rho a^4}{2c^2} + j\omega (\pi a^2 \rho).$$

### § II.3. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ИЗЛУЧЕНИЯ ЗВУКА ЦИЛИНДРОМ

Если поверхность длинного цилиндра колеблется так, что амплитуда скорости его поверхности зависит от азимута  $\varphi$  по закону  $v_a = v_0(\varphi)$ , то имеем только те члены решения (II.1.11), которые удовлетворяют граничному условию

$$v_0(\varphi) = -k \sum_{m=0}^{\infty} H'_m(ka) (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi). \quad (\text{II.3.1})$$

Рассматривая (II.3.1) как тригонометрический ряд Фурье, получаем:

$$\begin{aligned} A'_0 &= -\frac{1}{2k\pi H'_0(ka)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) d\varphi, \\ A'_m &= -\frac{1}{k\pi H'_m(ka)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) \cos m\varphi d\varphi, \\ B'_m &= -\frac{1}{k\pi H'_m(ka)} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) \sin \varphi d\varphi \\ &\quad (m = 1, 2, 3, \dots). \end{aligned} \quad (\text{II.3.2})$$

Потенциал поля цилиндрического источника представляем как

$$\begin{aligned} \Psi(r, \varphi, t) &= e^{j\omega t} \left[ A'_0 H_0^{(2)}(kr) + \right. \\ &\left. + \sum_{m=1}^{\infty} (A'_m \cos m\varphi + B'_m \sin m\varphi) H_m^{(2)}(kr) \right], \end{aligned} \quad (\text{II.3.3})$$

где  $A'_0$ ,  $A'_m$  и  $B'_m$  — коэффициенты, определяемые по формулам (II.3.2).

Рассмотрим несколько частных случаев.

**Излучение пульсирующей линии.** Предположим, что радиальная скорость поверхности цилиндра равна

$$v_a = \begin{cases} v_0 & \text{при } \varphi \leq \left| \frac{\Delta\alpha}{2} \right|, \\ 0 & \text{при } \varphi > \left| \frac{\Delta\alpha}{2} \right|. \end{cases}$$

Тогда легко вычисляют интегралы, входящие в (II.3.2):

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) d\varphi = \int_{\alpha}^{\alpha+\Delta\alpha} v_0 d\varphi = v_0 \Delta\alpha,$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) \cos m\varphi d\varphi = v_0 \int_{\alpha-\Delta\alpha/2}^{\alpha+\Delta\alpha/2} \cos m\varphi d\varphi \approx v_0 \cos m\alpha \Delta\alpha,$$

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} v_0(\varphi) \sin m\varphi d\varphi = v_0 \int_{\alpha-\Delta\alpha/2}^{\alpha+\Delta\alpha/2} \sin m\varphi d\varphi \approx v_0 \sin m\alpha \Delta\alpha.$$

Коэффициенты ряда, представляющего потенциал скорости  $\Psi$  в (II.1.11), при этом имеют вид:

$$A'_0 = -\frac{v_0 \Delta\alpha}{2k\pi H'_0(ka)}, \quad A'_m = -\frac{v_0 \cos m\alpha \Delta\alpha}{k\pi H'_m(ka)},$$

$$B'_m = -\frac{v_0 \sin m\alpha \Delta\alpha}{k\pi H'_m(ka)}.$$

Таким образом, потенциал, создаваемый узкой полосой, расположенной на жестком цилиндре, равен

$$\Psi(r, \varphi, t) = -\frac{v_0}{\pi k} e^{j\omega t} \Delta\alpha \sum_{m=0}^{\infty} \frac{H_m(kr)}{\varepsilon_m H'_m(ka)} \cos[m(\varphi - \alpha)], \quad (II.3.4)$$

где  $\varepsilon_m = \begin{cases} 2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$   
Для дальнего поля

$$H_m(kr) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{j\left(kr - \frac{2m+1}{4}\pi\right)},$$

поэтому формула (II.3.4) при  $kr \gg m$ ,  $kr \gg 1$  упрощается:

$$\Psi(r, \varphi, t) \approx -\frac{v_0}{k} \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j(\omega t - kr)} \psi(\varphi - \alpha) \Delta\alpha, \quad (II.3.5)$$

где  $\psi(\varphi - \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\frac{m+1}{4}\pi}}{\varepsilon_m H'_m(ka)} \cos[m(\varphi - \alpha)].$

Для звукового давления и колебательной скорости найдем:

$$p = j\rho\omega\Psi(r, \varphi, t) \approx v_0 \rho c \frac{a}{r} e^{j\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right)} \psi(\varphi - \alpha) \Delta\alpha,$$

$$v_r \approx v_0 \sqrt{\frac{a}{r}} e^{j\left(\omega t - kr + \frac{\pi}{2}\right)} \psi(\varphi - \alpha) \Delta\alpha. \quad (II.3.6)$$

Для численных расчетов, где встречаются функции Ханкеля, удобно пользоваться их представлением через амплитудное значение и фазу:

$$H'_m(x) = \mathcal{J}'_m(x) - jN'_m(x) = -j\dot{c}_m(x) e^{-j\dot{\gamma}'_m(x)},$$

$$\dot{c}'_m(x) = \sqrt{(\mathcal{J}'_m)^2 + (N'_m)^2}, \quad \dot{c}'_m(x) \sin[\dot{\gamma}'_m(x)] = -\mathcal{J}'_m(x), \quad (II.3.7)$$

$$\dot{c}'_m \cos \dot{\gamma}'_m(x) = N'_m(x).$$

Предельные значения амплитуд  $c_m$  и фазовых углов  $\gamma_m$  задают следующими приближенными формулами:

$$c'_m \approx c_m \underset{ka \gg m+1/2}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\pi ka}}, \quad \gamma_m \underset{ka \gg m+1/2}{\approx} ka - \frac{1}{2} \pi \left( m - \frac{1}{2} \right), \quad (II.3.8)$$

$$\gamma'_m \underset{ka \gg m+1/2}{\approx} ka - \pi \left( m + \frac{1}{2} \right),$$

$$c'_m \underset{ka \ll m+1/2}{\approx} \frac{m!}{2\pi} \left( \frac{2}{ka} \right)^{m+1}, \quad \gamma'_m \underset{ka \ll m+1/2}{\approx} -\frac{\pi m}{(m!)^2} \left( \frac{ka}{2} \right)^{2m} \approx -\gamma_m \text{ при } m > 0,$$

$$c_m \approx (m-1)! (2ka)^m / \pi, \quad (II.3.9)$$

$$c_0 \underset{ka \ll 1/2}{\approx} \frac{4}{\pi ka}, \quad \gamma_0 \underset{ka \ll 1/2}{\approx} \pi \left( \frac{ka}{2} \right)^2.$$

Используя соотношения (II.3.7), получаем

$$\psi(\varphi - \alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos [m(\varphi - \alpha)]}{c_m(ka)} e^{j \left[ \gamma_m(ka) + \frac{2m+1}{4} \pi \right]}. \quad (II.3.10)$$

Функция  $\psi(\varphi - \alpha)$  определяет характеристику направленности линейного источника, расположенного на поверхности цилиндра. Для малых  $ka$  на основании (II.3.9) находим

$$\psi(\varphi - \alpha) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} \frac{\pi ka}{\pi} \left\{ \frac{1}{4} + \sum_{m=0}^{\infty} \left( \frac{ka}{2} \right)^m \frac{1}{m!} \cos [m(\varphi - \alpha)] \right\} \approx \frac{\sqrt{2\pi ka}}{4\pi}.$$

Наибольший член в (II.3.10) будет при  $m=0$ . В этом случае характеристика направленности не зависит от  $(\varphi - \alpha)$ . Следовательно, полоса на цилиндре для низких частот создает ненаправленное излучение. При высоких частотах используем (II.3.8) и получаем потенциал скорости

$$\psi(\varphi - \alpha) \approx \frac{1}{\pi} e^{jka} \sum_{m=0}^{\infty} \cos [m(\varphi - \alpha)]$$

и звуковое давление

$$p = \rho c v_0 \sqrt{\frac{a}{r}} \frac{1}{\pi} e^{j\omega t - k(r-a)} \sum_{m=0}^{\infty} \cos [m(\varphi - \alpha)].$$

Интенсивность излучения равна

$$\mathcal{I} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [p^* v_r].$$

Используя (II.3.6) и (II.3.7), получаем для интенсивности излучателя

$$\mathcal{I} \approx \frac{1}{2} v_0^2 \rho c \frac{a}{r} (\Delta\alpha)^2 \operatorname{Re} (\psi^* \psi) =$$

$$= \frac{\rho c v_0^2 (d\alpha)^2}{2\pi f^4 r} \sum_{mn} \frac{\cos [n(\varphi - \alpha)] \cos [m(\varphi - \alpha)]}{C_m C_n} \cos \left[ \gamma_m - \gamma_n (m+n) \frac{\pi}{2} \right]. \quad (II.3.11)$$

Полная мощность, излучаемая единицей длины цилиндра,

$$\mathcal{P}_l = \int_s \mathcal{I} ds = \int_0^{2\pi} \mathcal{I} r d\varphi.$$

После интегрирования получаем

$$\mathcal{F}_l = \frac{\rho c^2 (v_0 d \alpha)^2}{2\pi^3 f} \left( \frac{2}{C_0^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{C_m^2} \right). \quad (\text{II.3.12})$$

На рис. II.3.1, а представлены полярные диаграммы интенсивности акустического излучения линии на цилиндре, рассчитанные по формуле (II.3.11) для различных  $ka$ . Слева схематически изображен поперечный разрез цилиндра. Видны направления излучения от линии. На рис. II.3.1, б показано, что излучаемая мощность в области низких частот возрастает пропорционально фактору  $ka = 2\pi a/\lambda$ .

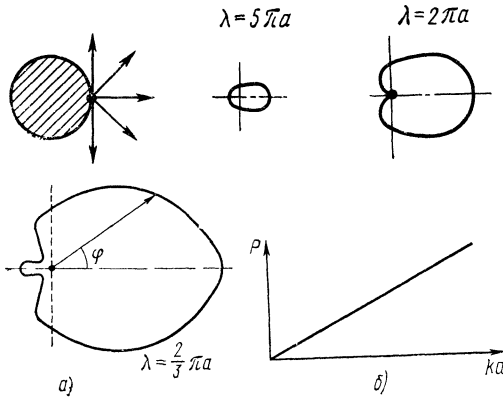


Рис. II.3.1

По мере увеличения отношения длины окружности поперечного сечения цилиндра к длине волны полная излучаемая мощность растет и излучение становится направленным. При низкой частоте ( $2\pi a \ll \lambda$ ) полная излучаемая мощность, приходящаяся на единицу длины цилиндра, очень мала и излучение происходит равномерно во все стороны. Это объясняют тем, что когда длина волны больше, чем поперечные размеры цилиндра, волны, излучаемые узкой полосой, лежащей на поверхности жесткого цилиндра, легко охватывают цилиндр.

При уменьшении длины появляется характерная направленность излучения: например, при  $ka=1$  интенсивность максимальна в направлении  $\varphi = \alpha$  и близка к нулю для  $\varphi = \alpha + \pi$ . При еще меньшей длине волны интенсивность максимальна в направлении  $\varphi = \alpha$  и близка к нулю в области геометрической тени.

**Излучение полосы на цилиндре.** Если на поверхности цилиндра имеется участок с некоторым амплитудно-фазовым распределением скоростей  $v(\alpha) = v_0(\alpha) e^{j\beta\alpha}$ , то звуковое поле можно рассматривать как суперпозицию полей отдельных линейных излучателей на поверхности цилиндра:

Например, пульсирующий участок с угловой шириной  $2\alpha_0$  амплитудной скорости  $v_0$  образует звуковое поле в точке с координатами  $r, \varphi$ :

$$\Psi(r, \varphi, t) = -\frac{1}{\pi k} e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{\varepsilon_n H'_n(ka)} \int_0^{2\pi} v_0(\alpha) e^{j\beta(\alpha)} \cos[n(\varphi - \alpha)] d\alpha. \quad (\text{II.3.13})$$

$$\Psi(r, \varphi, t) = \frac{v}{\pi k} e^{j\omega t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{\varepsilon_n H'_n(ka)} \int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos[n(\varphi - \alpha)] d\alpha. \quad (\text{II.3.14})$$

Вычислим интеграл:

$$\int_{-\alpha_0}^{+\alpha_0} \cos[n(\varphi - \alpha)] d\alpha = \frac{1}{n} \int_{n(\varphi + \alpha_0)}^{n(\varphi - \alpha_0)} \cos nz dz = \frac{2}{n} \sin n\alpha_0 \cos n\varphi.$$

Тогда потенциал легко привести к виду

$$\Psi = -\frac{2v_0}{\pi k} e^{j\omega t} \left[ \frac{H_0(kr) \alpha_0}{2H'_0(ka)} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n(kr)}{H'_n(ka)} \frac{\cos n\varphi \sin n\alpha_0}{n} \right]. \quad (\text{II.3.15})$$

Пользуясь (II.3.15), можно найти давление, колебательную скорость и другие характеристики поля. В частности, интенсивность излучения и полная мощность рассчитываются по формулам:

$$\mathcal{I} = \frac{4\rho c v_0^2}{\pi^3 k r} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{\sin m\alpha_0 \sin n\alpha_0 \cos m\varphi \sin n\varphi}{m n C_m(ka) C_n(ka)} \cos \left[ \delta'_m(ka) - \delta'_n(ka) - \frac{m-n}{2} \right] \pi,$$

$$\mathcal{I}^0 = \frac{4\rho c v_0^2}{\pi^2 \omega} \left( \frac{2\alpha_0^2}{C_0^2(ka)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m\alpha_0}{m^2 C_m^2(ka)} \right).$$

Используя приближенное значение выражения для  $C_m$  (II.3.9), получаем:

$$\mathcal{I} \approx_{ka \ll 1} \frac{\rho \omega a^2 \alpha_0^2}{4\pi r} = \frac{\rho \omega s^2}{8\pi r} \frac{v_0^2}{2},$$

$$\mathcal{I}^0 \approx_{ka \ll 1} 2\pi r \mathcal{I} = \frac{\rho \omega (sv_0)^2}{4} = \frac{1}{2} x'_n v_0^2,$$

где  $s = a2\alpha_0$  — площадь единицы длины полосы.

Активная часть импеданса полосы при низких частотах равна

$$x'_n \approx_{ka \ll 1} \frac{\rho \omega s}{4} = \frac{\alpha_0 s \rho c}{2} ka.$$

Интенсивность излучения полосы на цилиндре пропорциональна квадрату площади единицы длины и обратно пропорциональна расстоянию от излучателя. Удельный импеданс пропорционален  $ka$ , т. е. значительно меньше единицы.

## § II.4. ИЗЛУЧЕНИЕ КОЛЬЦА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

В предыдущем параграфе мы изучали цилиндрические излучатели, у которых колебания не зависят от координаты  $z$ , ориентированной вдоль оси цилиндра. Однако большей частью реальные цилиндрические излучатели и приемники имеют активные элементы, ограниченные по оси  $Z$ .

Простейшим акустическим излучателем такого типа является кольцевой пьезоэлектрический преобразователь, вставленный в жесткий цилиндрический экран. Для расчета поля такого преобразователя допустим, что цилиндрический экран имеет неограниченную длину, а активный элемент высотой  $2h$  пульсирует с колебательной скоростью  $v_0 e^{j\omega t}$ . Цилиндрическую систему координат расположим так, чтобы плоскость  $Z=0$  проходила посередине высоты этого элемента.

В пространстве, окружающем цилиндр, возбуждается акустическое поле, потенциал которого

$$\Psi(r, z, t) = \psi(r, z) e^{j\omega t} \quad (\text{II.4.1})$$

должен удовлетворять волновому уравнению непрерывности радиальной скорости на поверхности цилиндра и условию излучения. После подстановки (II.4.1) в волновое уравнение получаем уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{II.4.2})$$