

Пользуясь (II.3.15), можно найти давление, колебательную скорость и другие характеристики поля. В частности, интенсивность излучения и полная мощность рассчитываются по формулам:

$$\mathcal{I} = \frac{4\rho c v_0^2}{\pi^3 k r} \sum_{n, m=0}^{\infty} \frac{\sin m\alpha_0 \sin n\alpha_0 \cos m\varphi \sin n\varphi}{mn C_m(ka) C_n(ka)} \cos \left[\delta'_m(ka) - \delta'_n(ka) - \frac{m-n}{2} \right] \pi,$$

$$\mathcal{I}^0 = \frac{4\rho c v_0^2}{\pi^2 \omega} \left(\frac{2\alpha_0^2}{C_0^2(ka)} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin^2 m\alpha_0}{m^2 C_m^2(ka)} \right).$$

Используя приближенное значение выражения для C_m (II.3.9), получаем:

$$\mathcal{I} \approx_{ka \ll 1} \frac{\rho \omega a^2 \alpha_0^2}{4\pi r} = \frac{\rho \omega s^2}{8\pi r} \frac{v_0^2}{2},$$

$$\mathcal{I}^0 \approx_{ka \ll 1} 2\pi r \mathcal{I} = \frac{\rho \omega (sv_0)^2}{4} = \frac{1}{2} x'_n v_0^2,$$

где $s = a2\alpha_0$ — площадь единицы длины полосы.

Активная часть импеданса полосы при низких частотах равна

$$x'_n \approx_{ka \ll 1} \frac{\rho \omega s}{4} = \frac{\alpha_0 s \rho c}{2} ka.$$

Интенсивность излучения полосы на цилиндре пропорциональна квадрату площади единицы длины и обратно пропорциональна расстоянию от излучателя. Удельный импеданс пропорционален ka , т. е. значительно меньше единицы.

§ II.4. ИЗЛУЧЕНИЕ КОЛЬЦА, РАСПОЛОЖЕННОГО НА ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

В предыдущем параграфе мы изучали цилиндрические излучатели, у которых колебания не зависят от координаты z , ориентированной вдоль оси цилиндра. Однако большей частью реальные цилиндрические излучатели и приемники имеют активные элементы, ограниченные по оси Z .

Простейшим акустическим излучателем такого типа является кольцевой пьезоэлектрический преобразователь, вставленный в жесткий цилиндрический экран. Для расчета поля такого преобразователя допустим, что цилиндрический экран имеет неограниченную длину, а активный элемент высотой $2h$ пульсирует с колебательной скоростью $v_0 e^{j\omega t}$. Цилиндрическую систему координат расположим так, чтобы плоскость $Z=0$ проходила посередине высоты этого элемента.

В пространстве, окружающем цилиндр, возбуждается акустическое поле, потенциал которого

$$\Psi(r, z, t) = \psi(r, z) e^{j\omega t} \quad (\text{II.4.1})$$

должен удовлетворять волновому уравнению непрерывности радиальной скорости на поверхности цилиндра и условию излучения. После подстановки (II.4.1) в волновое уравнение получаем уравнение Гельмгольца в цилиндрических координатах

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{II.4.2})$$

с граничным условием

$$-\frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{r=a} = v_0(z), \quad (\text{II.4.3})$$

где $v_0(z)$ — комплексная амплитуда скорости поверхности цилиндра.

Для того чтобы функция ψ удовлетворяла граничному условию (II.4.3), необходимо, чтобы она не зависела от азимута φ . В этом случае волновое уравнение (II.4.2) приобретает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + k^2 \psi = 0 \quad (\text{II.4.4})$$

при граничном условии

$$-\frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = \begin{cases} v_0 & \text{при } |z| \leq h, \\ 0 & \text{при } |z| > h. \end{cases} \quad (\text{II.4.5})$$

Можно было бы пытаться искать решение (II.4.4) при условии (II.4.5), применяя метод расщепления, положив $\psi = r(z)R(r)$. Как было показано выше, этот метод приводит к тому, что $Z(z)$ оказывается гармонической функцией. А так как на границе раздела градиент функции $\psi(z, r)$ на участке $-h < z < h$ постоянен, то произведение $\psi = Z(z)R(r)$ не может удовлетворять граничному условию (II.4.5). Таким образом, функция $\psi = Z(z)R(r)$ не является решением.

Поэтому надо искать другие варианты решения задачи. Используют, например в [21], применение к (II.4.4) и (II.4.5) метода прямого и обратного интегральных преобразований Фурье. В связи с этим представим искомую функцию в виде интеграла Фурье:

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(r, \tau) e^{jz\tau} d\tau \quad (\text{II.4.6})$$

с коэффициентами разложения

$$F(r, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, z) e^{-j\tau z} dz. \quad (\text{II.4.7})$$

Умножив (II.4.4) и (II.4.5) на $e^{-j\tau r}$ и проинтегрировав в области $-\infty < z < +\infty$, получим:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) e^{-j\tau z} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} e^{-j\tau z} dz + k^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi e^{-j\tau z} dz = 0, \quad (\text{II.4.8})$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=a} e^{-j\tau z} dz = \begin{cases} -v_0 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\tau z} dz & \text{при } |z| \leq h, \\ 0 & \text{при } |z| > h. \end{cases} \quad (\text{II.4.9})$$

Второе слагаемое (II.4.8) повторным интегрированием по частям сводят к выражению

$$-\tau^2 \int_{-\infty}^{\infty} \psi(r, z) e^{-j\tau z} dz = -\tau^2 F(r, \tau).$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) e^{-j\tau z} dz &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) \int_{-\infty}^{\infty} \psi(z, r) e^{-j\tau z} dz = \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} F(r, \tau) \right], \\ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial \psi}{\partial r} \Big|_{r=a} e^{-j\tau z} dz &= \frac{\partial}{\partial r} \int_{-\infty}^{\infty} \psi e^{-j\tau z} dz \Big|_{r=a} = \frac{\partial F(r, \tau)}{\partial r} \Big|_{r=a}; \\ v_0 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\tau z} dz &= v_0 \int_{-h}^{+h} e^{-j\tau z} dz = v_0 \frac{e^{-j\tau h} - e^{j\tau h}}{-j\tau} = \frac{2v_0}{\tau} \sin \tau h. \end{aligned}$$

Таким образом, уравнение Гельмгольца относительно функции двух переменных путем прямого интегрального преобразования Фурье сводят к уравнению для трансформанты $\mathcal{F}(r, \tau)$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial \mathcal{F}(r, \tau)}{\partial r} \right] + (k^2 - \tau^2) \mathcal{F}(r, \tau) = 0 \quad (\text{II.4.10})$$

с граничным условием

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial r} \Big|_{r=a} = \begin{cases} -\frac{2v_0}{\tau} \sin \tau h & \text{при } |z| \leq h, \\ 0 & \text{при } |z| > h. \end{cases} \quad (\text{II.4.11})$$

Введением новой переменной $x = r \sqrt{k^2 - \tau^2}$ легко преобразовать (II.4.10) и (II.4.11) к виду

$$\frac{d^2 \mathcal{F}(x, \tau)}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{d\mathcal{F}(x, \tau)}{dx} + \mathcal{F}(x, \tau) = 0, \quad (\text{II.4.12})$$

$$\sqrt{k^2 - \tau^2} \frac{\partial \mathcal{F}(x, \tau)}{\partial x} \Big|_{x=a \sqrt{k^2 - \tau^2}} = \begin{cases} -\frac{2v_0}{\tau} \sin \tau h & \text{при } |z| \leq h, \\ 0 & \text{при } |z| > h \end{cases} \quad (\text{II.4.13})$$

($-\infty < \tau < \infty$).

Решением уравнения (II.4.12), удовлетворяющим условию излучения, является функция Ханкеля нулевого порядка второго рода:

$$\mathcal{F}(x, \tau) = A(\tau) H_0(x).$$

Граничное условие (II.4.13) для функции $\mathcal{F}(x, \tau)$ имеет вид

$$\sqrt{k^2 - \tau^2} A(\tau) \frac{dH_0(x)}{dx} \Big|_{x=a \sqrt{k^2 - \tau^2}} = \frac{2v_0}{\tau} \sin(\tau h),$$

откуда

$$A(\tau) = \frac{2v_0 \sin(\tau h)}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} H'_0(x_0)},$$

где $x_0 = a \sqrt{k^2 - \tau^2}$; $H'_0 = \frac{dH_0}{dx} \Big|_{x=x_0}$.

Таким образом, трансформанту интегрального преобразования Фурье, удовлетворяющую поставленной задаче, выражают соотношением

$$\mathcal{F}(r, \tau) = \frac{2v_0 \sin(\tau h) H_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2})}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} H'_0(a \sqrt{k^2 - \tau^2})}.$$

Для нахождения первообразной функции $\psi(r, z)$ применим к трансформанте $\mathcal{F}(r, \tau)$ обратное преобразование Фурье:

$$\psi(r, z) = -\frac{v_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\tau h) H_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2}) e^{j\tau z}}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} H'_0(a \sqrt{k^2 - \tau^2})} d\tau.$$

Пользуясь формулами для вычисления производной цилиндрических функций, получаем

$$\psi(r, z) = \frac{v_0}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\tau h) H_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2}) e^{j\tau z}}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} H_1(a \sqrt{k^2 - \tau^2})} d\tau, \quad (\text{II.4.14})$$

где k — волновое число; H_0 и H_1 — функции Ханкеля нулевого и первого порядка; τ — некоторый параметр.

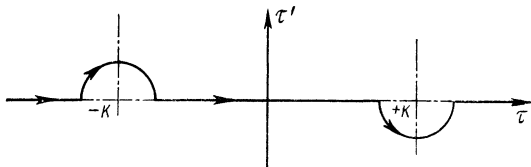


Рис. II.4.1

Подынтегральная функция (II.4.14) — комплексная и имеет особенность в точках $\tau = \pm k$. Интегрирование здесь проводится по действительному переменному τ .

Рассматривая плоскость комплексного переменного $\tau + i\tau'$, проведем интегрирование вдоль действительной оси плоскости комплексного переменного. В области, где $\tau = -k$, обход особой точки сверху, а в области $\tau = +k$ — снизу. Обход выполняется по контуру малого радиуса (рис. II.4.1). В этом случае при числовом определении интеграла особенности исключаются и с помощью электронно-вычислительных машин можно вычислить потенциал поля точек пространства при тех или иных параметрах излучателя. Для области дальнего поля интеграл (II.4.14) может быть преобразован к более удобному виду. Используя асимптотическое выражение функции $H_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2})$, новую переменную $r = k \sin s$ и сферическую систему координат $R = \sqrt{r^2 + z^2}$, $\theta = \arctg z/r$, после несложных преобразований получаем

$$\psi(R) \approx \frac{\sqrt{2} v_0 e^{3/4\pi i}}{\pi k \sqrt{R k \pi}} \int_s f(s) e^{R k \gamma(s)} ds, \quad (\text{II.4.15})$$

где $\gamma(s) = j \cos(s + \theta)$, $f(s) = \frac{\sin(kh \sin s)}{\sin s H_1(ka \cos s) \sqrt{\cos \theta \sin s}}$.

Контурный интеграл $\int_C f(s) e^{Rk\gamma(s)} ds$ вычислим с помощью метода перевала. Решая уравнение $f'(s) = 0$, находим седловую точку $s = -\theta$. Для определения направления наиболее крутого спуска, проходящего через седловую точку, разложим функцию $\gamma(s)$ в ряд:

$$\gamma(s) = j \cos(s + \theta) = j \left[1 - \frac{(s + \theta)^2}{2!} + \frac{(s + \theta)^4}{4!} - \dots \right].$$

Определяя окрестность седловой точки равенством $s = -\theta + \varepsilon e^{j\varphi}$ для малых значений ε и $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, можно записать

$$\gamma(s, \varphi) \approx \frac{\varepsilon^2}{2} \sin 2\varphi + j \left(1 - \frac{\varepsilon}{2} \cos 2\varphi \right).$$

Остальные члены отброшены в силу малости значений ε . Из последнего соотношения видно, что вещественная часть функции $\gamma(s)$ в окрестности седловой точки остается отрицательной и наиболее быстро изменяется на плоскости комплексного переменного в направлении $\varphi = -\pi/4$.

Для вычисления несобственного интеграла (II.4.15) по методу перевала деформируем контур интегрирования так, чтобы он прошел через седловую точку в направлении $\varphi = \pi/4$. Ограничив малым участком пути интегрирования в окрестности седловой точки, получим для значения интеграла (II.4.15) равенство

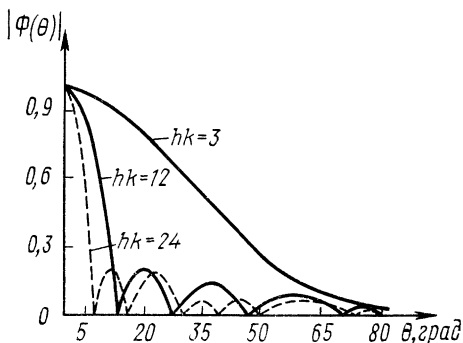


Рис. II.4.2

$$\int_C f(s) e^{Rk\gamma(s)} ds \approx \sqrt{\frac{2\pi}{Rk\gamma''(s_0)}} f(s_0) e^{Rk\gamma(s_0)}.$$

Подставив в правую часть $s = -\theta$, $\gamma(s_0) = j$ и $\gamma''(s_0) = -j$, получим:

$$\Psi(R, \theta, t) = \frac{2v_0 \sin(hk \sin \theta)}{R\pi k^2 \sin \theta \cos \theta H_1(ak \cos \theta)} e^{j(Rk + \pi/2)} e^{-j\omega t},$$

$$\Psi(R, \theta, t)_{\theta=0} \approx \frac{2v_0 h}{\pi H_1(ak)} \frac{1}{R} e^{j(Rk + \pi/2)} e^{-j\omega t}. \quad (\text{II.4.16})$$

Отсюда функция направленности

$$\Phi = \frac{|\Psi(R, \theta, t)|}{|\Psi(R, 0, t)|} = \frac{|\sin(hk \sin \theta) H_1(ak)|}{hk |\cos \theta \sin \theta (H_1(ak \cos \theta))|} =$$

$$= \frac{|\sin(hk \sin \theta) C_1(ak) e^{j\delta_1(ka) - j\delta_1(ka \cos \theta)}|}{hk |\cos \theta \sin \theta C_1(ak \cos \theta)|}, \quad (\text{II.4.17})$$

где C_1 — модуль и δ_1 — фаза первой функции Ханкеля первого порядка.

На рис. II.4.2 приведены диаграммы направленности $\Phi(\theta)$ в вертикальной плоскости для цилиндра с радиусом $a = 24/k$ ($ak = 24$) и $hk = 3$; $hk = 12$ и $hk = 24$, из которых следует, что увеличение параметра hk (т. е. волнового размера высоты кольца) сопровождается возрастанием направленности излучения и появлением добавочных максимумов. Расчеты, произведенные для других значений ka , позволяют отметить, что диаграмма направленности мало изменяется с изменением радиуса цилиндра. Например, при $a_1 k = 12$ диаграмма направленности кольца высотой $h = 12/k$ такая же, как и для кольца той же высоты, но на цилиндре с радиусом, в два раза большим, т. е. $a_2 = 24/k$.

§ II.5. ИЗЛУЧЕНИЕ СИСТЕМЫ КОЛЕЦ, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА ЦИЛИНДРЕ

Акустическое поле системы пульсирующих колец на цилиндре получается путем суперпозиции полей отдельных колец.

Допустим, что имеется n ($n = 1, 2, 3, \dots$) несинфазно пульсирующих колец, расположенных на расстоянии d одно от другого. Предполагается, что кольцо 1 расположено симметрично плоскости $z = 0$, а все остальные (2, 3, 4) — в положительном направлении оси Z (рис. II.5.1). При таком расположении колец соотношения

$$\begin{aligned} 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \quad \rho = a; \\ (l-1)d - h \leq z \leq (l-1)d + h \\ (l = 1, 2, 3, \dots, m, \dots) \end{aligned}$$

определяют участки поверхности цилиндра, занятые излучателями. Будем считать, что каждое кольцо пульсирует со

скоростью $v_0 e^{-j(\omega t - \alpha)}$ и создает в направлении θ звуковое поле. Первое кольцо создает в направлении θ потенциал

$$\Psi_1(R, \theta, t) \underset{kR \gg 1}{=} \frac{2v_0 \sin(kh \sin \theta) e^{(kR + \pi/2)} e^{-j(\omega t + \alpha)}}{\pi k^2 \sin \theta \cos \theta H_1(ka \cos \theta)}. \quad (\text{II.5.1})$$

Потенциал l -го кольца в направлении θ имеет отставание по фазе на $AB = kd(l-1)\sin\theta$, а потенциал поля, создаваемого этим кольцом, отличается от (II.5.1) фазовым множителем $e^{-jk(l-1)d\sin\theta}$. Поле, создаваемое системой m колец, является суперпозицией полей (II.5.1) и выражается формулой

$$\Psi(r, \theta, t) = \frac{2v_0 \sin(kh \sin \theta) e^{j(kr + \pi/2)}}{\pi k^2 \cos \theta \sin \theta H_1(ka \cos \theta)} \cdot \frac{1}{r} \sum_{l=1}^m e^{j[\omega t - k(l-1)d \sin \theta + d_l]}, \quad (\text{II.5.2})$$