показаны характеристики направленности системы пульсирующих колец на цилиндре ($m=10$), рассчитанные по (II.5.5) при значениях параметров $ka=14$; $kd=\pi$; $kh=0{,}49\pi$; $\gamma_1=20^\circ$; $\gamma_2=80^\circ$ и $ka=14$; $kd=0{,}5\pi$; $kh=0{,}24\pi$; $\gamma_1=20^\circ$; $\gamma_2=88^\circ$. Пространственную картину направленности системы получают при вращении фигур вокруг оси Z. Из графиков видно, что с приближением направления компенсации к оси цилиндра ($\gamma=80^\circ$) возникает излучение по направлению оси

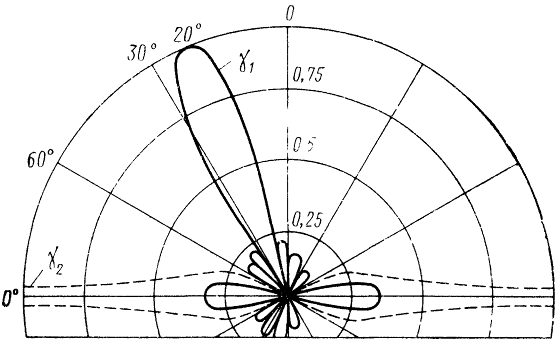

Рис. II.5.3

цилиндра (пунктирная кривая). При $d=\pi\lambda/4$ существует только одностороннее излучение. Если $d=\lambda/2$, то излучение по оси цилиндра направлено в противоположные стороны. Характеристики направленности сужаются тем сильнее, чем больше kh. Если создать угол компенсации, близкий к 90° (направление совпадает с осью цилиндра), то возникает следующая закономерность направленности вдоль оси: с увеличением ka острота диаграммы направленности увеличивается.

ГЛАВА III

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОБ ИЗЛУЧЕНИИ

§ III.1. ТЕОРЕМА ОСТРОГРАДСКОГО—ГАУССА. ФОРМУЛА ГРИНА

Для непрерывной, однозначной и конечной функции, имеющей непрерывные и конечные производные, справедлива теорема Остроградского — Гаусса:

$$\int\limits_V (\nabla \mathbf{A})\, dV = \oint\limits_{(V)} (\mathbf{A}\mathbf{n})\, df, \qquad \text{(III.1.1)}$$

где V — объем области G, в которой определена функция $\mathbf{A}$; (V) — поверхность, ограничивающая этот объем; df — элемент поверхности с единичной внешней нормалью $\mathbf{n}$; $\nabla = i_x \frac{\partial}{\partial x} + i_y \frac{\partial}{\partial y} + i_z \frac{\partial}{\partial z}$ — дифференциальный оператор первого порядка в прямоугольной системе координат.

Здесь принято обозначать замкнутую поверхность, охватывающую объем V, символом (V).

Когда векторная функция выражается через скалярный потенциал $\left(\mathbf{A}=\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,\mathbf{n}=\nabla\varphi\right)$, теорема (III.1.1) приводится к виду

$$\int\limits_V \nabla^2\varphi\, dV=\oint\limits_{(V)}\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,df. \qquad \text{(III.1.2)}$$

Интегральное соотношение (III.1.2) называют *первой формулой Грина*. В таком виде теорема Остроградского — Гаусса может быть применена при расчете статистических полей. Для приложения к расчету динамических полей первая формула Грина должна быть преобразована. С этой целью определим два потенциальных поля $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ посредством формул $\mathbf{A}=\varphi\nabla\psi$, $\mathbf{B}=\psi\nabla\varphi$ и проведем над ними операции (III.1.1). Интегралы по объему для полей A и B равны

$$\int\limits_V(\nabla\mathbf{A})\,dV=\int\limits_V\nabla(\varphi\nabla\psi)\,dV=\int\limits_V\{(\nabla\varphi\nabla\psi+\psi\nabla^2\varphi\}\,dV\ ,$$

$$\int\limits_V(\nabla B)\,dV=\int\limits_V\nabla(\psi\nabla\varphi)\,dV=\int\limits_V\{\nabla\psi\nabla\varphi+\psi\nabla^2\varphi\}\,\partial V.$$

Тогда из (III.1.1) получаем

$$\int\limits_V\{(\nabla\varphi)(\nabla\psi)+\varphi\nabla^2\psi\}\,dV=\int\limits_{(V)}\varphi(\nabla\psi\mathbf{n})\,df;$$

$$\int\limits_V[(\nabla\psi)(\nabla\varphi)+\psi\nabla^2\varphi]\,dV=\int\limits_{(V)}\psi(\nabla\varphi\mathbf{n})\,df.$$

Вычитая из первого интегрального выражения второе, получаем *вторую формулу Грина*

$$\int\limits_V(\varphi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\varphi)\,dV=\int\limits_{(V)}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)df. \qquad \text{(III.1.3)}$$

Предположим, что функции φ и ψ, входящие в (III.1.3), удовлетворяют *уравнениям Гельмгольца*:

$$\Delta^2\varphi=-k^2\varphi,\ \ \nabla^2\psi=-k^2\psi. \qquad \text{(III.1.4)}$$

Тогда интеграл по объему в (III.1.3) исчезает и вторая формула Грина принимает вид

$$\int\limits_{(V)}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)df=0. \qquad \text{(III.1.5)}$$

Отметим, что формула (III.1.5) справедлива не только для волновых функций φ и ψ, но и для функций, удовлетворяющих уравнениям Лапласа и теплопроводности.

Применительно к акустическим полям вторая формула Грина (III.1.5) имеет следующий физический смысл. Допустим, что потенциалы φ и ψ создаются независимыми источниками a и b. Звуковое давление и колебательная скорость на участке поверхности $\mathbf{n}\,df$, создаваемые источниками a и b, выражаются формулами

$$p_a = j\omega\rho\varphi, \quad v_a = -\partial\varphi/\partial n,$$
$$p_b = j\omega\rho\psi, \quad v_b = -\partial\psi/dn.$$

Отсюда следует:

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{1}{j\omega\rho} p_a, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -v_a, \\ \psi &= \frac{1}{j\omega\rho} p_b, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = -v_b. \end{aligned} \tag{III.1.6}$$

Используя формулы (III.1.6), преобразуем формулу Грина к виду, удобному для физической интерпретации:

$$\int\limits_{(V)} p_a v_b\, df = \int\limits_{(V)} p_b v_a\, df. \tag{III.1.7}$$

Нетрудно видеть, что каждый из интегралов (III.1.7) имеет размерность мощности, а уравнение выражает математическую запись следующего положения: *мощность, выделяемая силами звукового давления источника a против движения жидкости, создаваемого источником b, равна мощности, выделяемой на этой поверхности звуковым давлением, создаваемым источником b против движения жидкости, вызванным полем источника a.*

§ III.2. ИНТЕГРАЛ ГЕЛЬМГОЛЬЦА—КИРХГОФА

Вторая формула Грина (III.1.5) дает возможность вывести интегральное уравнение для вычисления потенциала поля в любой точке пространства, если известны потенциал и его производная по нормали на некоторой достаточно гладкой замкнутой поверхности. Это уравнение выведено Гельмгольцем (1857 г.) и называется *интегральной теоремой Гельмгольца.*

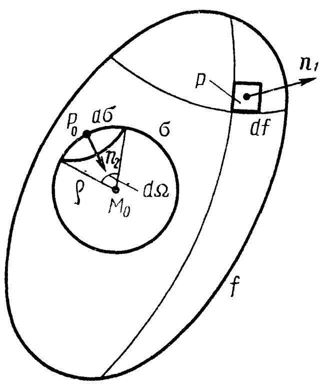

Рис. III.2.1

Найдем это уравнение для области G, внутренней относительно замкнутой поверхности f. С этой целью исключим из области, ограниченной поверхностью f, произвольно выбранную точку M_0, для чего построим вокруг нее сферическую поверхность σ с центром в M_0 и радиусом ρ. Пусть поверхности σ и f не пересекаются (рис. III.2.1). Поверхность, по которой надо проводить интегрирование (III.1.5), состоит из двух частей: поверхности f с внешней нормалью $\mathbf{n}_1$ и поверхности малой сферы σ с внутренней нормалью $\mathbf{n}_2$. Область, в которой функции φ и ψ удовлетворяют условиям непрерывности и дифференцируемости, является внешней