давление и колебательная скорость на участке поверхности $\mathbf{n}\,df$, создаваемые источниками a и b, выражаются формулами

$$p_a = j\omega\rho\varphi, \quad v_a = -\partial\varphi/\partial n,$$
$$p_b = j\omega\rho\psi, \quad v_b = -\partial\psi/dn.$$

Отсюда следует:

$$\varphi = \frac{1}{j\omega\rho} p_a, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -v_a,$$
$$\psi = \frac{1}{j\omega\rho} p_b, \quad \frac{\partial\psi}{\partial n} = -v_b. \qquad \text{(III.1.6)}$$

Используя формулы (III.1.6), преобразуем формулу Грина к виду, удобному для физической интерпретации:

$$\int\limits_{(V)} p_a v_b\, df = \int\limits_{(V)} p_b v_a\, df. \qquad \text{(III.1.7)}$$

Нетрудно видеть, что каждый из интегралов (III.1.7) имеет размерность мощности, а уравнение выражает математическую запись следующего положения: *мощность, выделяемая силами звукового давления источника a против движения жидкости, создаваемого источником b, равна мощности, выделяемой на этой поверхности звуковым давлением, создаваемым источником b против движения жидкости, вызванным полем источника a.*

§ III.2. ИНТЕГРАЛ ГЕЛЬМГОЛЬЦА—КИРХГОФА

Вторая формула Грина (III.1.5) дает возможность вывести интегральное уравнение для вычисления потенциала поля в любой точке пространства, если известны потенциал и его производная по нормали на некоторой достаточно гладкой замкнутой поверхности. Это уравнение выведено Гельмгольцем (1857 г.) и называется *интегральной теоремой Гельмгольца*.

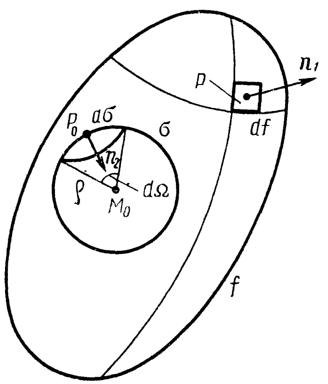

Рис. III.2.1

Найдем это уравнение для области G, внутренней относительно замкнутой поверхности f. С этой целью исключим из области, ограниченной поверхностью f, произвольно выбранную точку M_0, для чего построим вокруг нее сферическую поверхность σ с центром в M_0 и радиусом ρ. Пусть поверхности σ и f не пересекаются (рис. III.2.1). Поверхность, по которой надо проводить интегрирование (III.1.5), состоит из двух частей: поверхности f с внешней нормалью $\mathbf{n}_1$ и поверхности малой сферы σ с внутренней нормалью $\mathbf{n}_2$. Область, в которой функции φ и ψ удовлетворяют условиям непрерывности и дифференцируемости, является внешней по отношению к σ и внутренней по отношению к f, включая точки, лежащие на этих поверхностях. Для данного случая формула Грина (III.1.5) преобразуется к следующему виду:

$$\int_f \left[\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial\psi(r_{M_0P})}{\partial n} - \psi(r_{M_0P})\frac{\partial\varphi(r_{M_0P})}{\partial n}\right]\partial f -$$

$$- \int_\sigma \left[\varphi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\psi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho} - \psi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\varphi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho}\right]d\sigma = 0, \qquad \text{(III.2.1)}$$

где P — точка на поверхности f; P_0 — точка на поверхности сферы σ.

Элемент площади сферической поверхности выражают с помощью телесного угла Ω формулой $d\sigma = p^2\,d\Omega$, поэтому

$$\int_0^{4\pi} \left[\varphi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\psi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho} - \psi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\varphi(\rho_{M_0P_0})}{\partial n}\right]d\Omega =$$

$$= 4\pi\left[\varphi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\psi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho} - \psi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\varphi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho}\right]\rho^2.$$

Перепишем (III.2.1) в виде интегрального соотношения:

$$4\pi\left[\varphi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\psi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho} - \psi(\rho_{M_0P_0})\frac{\partial\varphi(\rho_{M_0P_0})}{\partial\rho}\right]\rho^2 =$$

$$= \int_f \left[\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial\psi(r_{M_0P})}{\partial n} - \psi(r_{M_0P})\frac{\partial\varphi(r_{M_0P_0})}{\partial n}\right]df. \qquad \text{(III.2.2)}$$

Функции φ и ψ непрерывны и однозначны в области G и удовлетворяют волновому уравнению. Для того чтобы с помощью выражения (III.2.2) можно было найти функцию $\varphi(r)$ в точке M_0, наложим на функцию $\psi(\rho)$ дополнительное условие

$$\lim\left[\varphi(\rho)\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\rho^2 - \frac{\partial\varphi(\rho)}{\partial\rho}\psi(\rho)\rho^2\right] = \pm\varphi(M_0). \qquad \text{(III.2.3)}$$

Напомним, что $\psi(\rho)$ одновременно является решением волнового уравнения. Простейшим решением, удовлетворяющим условию (III.2.3), является волновая функция, модуль которой изменяется как $1/\rho$:

$$\psi(\rho) = \frac{e^{\pm jk\rho}}{\rho}. \qquad \text{(III.2.4)}$$

В самом деле, второе слагаемое (III.2.3) при $\rho \geqslant 0$ обращается в нуль, а первое равно

$$\lim\left[\varphi(\rho)\frac{\partial\psi(\rho)}{\partial\rho}\rho^2\right] = \lim\varphi(\rho)\left(-\frac{1+jk\rho}{\rho^2}\right)\rho^2 e^{-jk\rho} = -\varphi(M_0). \qquad \text{(III.2.5)}$$

Используя этот предел, запишем (III.2.2) для $\rho \to 0$. В результате получаем интегральную теорему Гельмгольца для внутренней краевой задачи:

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_f \left[\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}} - \frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}\frac{\partial\varphi(r_{M_0P})}{\partial n}\right]df. \tag{III.2.6}$$

Здесь M_0 — произвольная точка внутренней области, поэтому (III.2.6) выполняется для всех точек области G, ограниченной поверхностью f.

Покажем, что интегральная теорема (III.2.6) верна и для внешней области, но при этом искомая функция $\varphi(M)$ должна удовлетворять условиям излучения.

Как и для случая внутренней области, окружим точку M_0 сферой малого радиуса ρ и, кроме того, поверхность f и сферу охватим сферической поверхностью Σ большего радиуса (рис. III.2.2). В этом случае формула Грина содержит три интеграла:

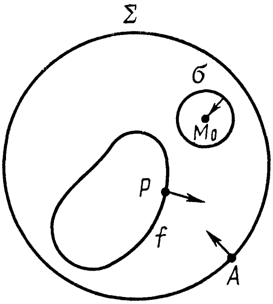

Рис. III.2.2

$$\int\limits_f + \int\limits_\sigma + \int\limits_\Sigma = 0,$$

где $\int\limits_f$, $\int\limits_\sigma$ и $\int\limits_\Sigma$ — интегралы по поверхностям f, σ и Σ.

Как было показано выше, если $\psi(\rho) = e^{-jk\rho}/\rho$, то интеграл $\int\limits_\sigma$ при $\rho \to 0$ стремится к $-4\pi\varphi(M_0)$.

Радиус поверхности Σ ничем не ограничен, поэтому интеграл по поверхности Σ при достаточно большом радиусе R имеет вид

$$\int\limits_\Sigma = 4\pi\left[\varphi(R)\frac{-(1+jkR)}{R^2}R^2 e^{-jkR} - \frac{R^2 e^{-jkR}}{R}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right] =$$

$$= 4\pi\left[-\varphi(R)e^{-jkR}(1+jkR) - Re^{-jkR}\frac{\partial\varphi}{\partial R}\right].$$

Таким образом, при $\rho \to 0$, $kR \gg 1$

$$\int\limits_f \left[\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}} - \frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}\frac{\partial\varphi(r_{M_0P})}{\partial n}\right]df +$$

$$+ 4\pi\varphi(M_0) - 4\pi\left[\varphi(R)e^{-jkR}(1+jkR) + Re^{-jkR}\frac{\partial\varphi(R)}{\partial R}\right] = 0,$$

$$\int\limits_f \left[\varphi(r)\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r}\frac{\partial\varphi(r)}{\partial n}\right]df + 4\pi\varphi(M_0) - 4\pi Re^{-jkR}\left[\frac{\partial\varphi(R)}{\partial R} + \right.$$

$$\left. + jk\varphi(R)\right] = 0$$

и функция φ, определенная в области, внешней относительно поверхности f и внутренней относительно Σ, равна

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_f \left[\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}} - \frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}\frac{\partial\varphi(r_{M_0P})}{\partial n}\right]df + F(R_{M_0A}), \tag{III.2.7}$$

где

$$F(R_{M_0A}) = \varphi(R_{M_0A})(1 + jkR_{M_0A})\,\mathrm{e}^{-jkR_{M_0A}} + R_{M_0A}\mathrm{e}^{-jkR_{M_0A}} \frac{\partial\varphi(R_{M_0A})}{\partial R_{M_0A}},$$

$$F(R_{M_0A}) \underset{R_{M_0A} \gg 1/k}{\approx} \varphi(R_{M_0A})\, jkR_{M_0A}\mathrm{e}^{-jkR_{M_0A}} +$$

$$+ R_{M_0A}\mathrm{e}^{-jkR_{M_0A}} \frac{\partial\varphi(R_{M_0A})}{\partial R_{M_0A}} = \mathrm{e}^{-jkR_{M_0A}} R_{M_0A}\left[\frac{\partial\varphi(R_{M_0A})}{\partial R_{M_0A}} + jk\varphi(R_{M_0A})\right]. \quad \text{(III.2.8)}$$

Для того чтобы функция $\varphi(M_0)$ была определена для всей внешней области, включая бесконечно удаленные точки A, необходимо наложить дополнительные условия на ее характер в области $R_{M_0A} \to \to \infty$. Условие, при котором (III.2.8) при неограниченном возрастании расстояния R_{M_0A} стремится к нулю, т. е.

$$\lim_{R \to \infty} R\left[\frac{\partial\varphi(R)}{\partial R} + jk\varphi(R)\right] = 0, \quad \text{(III.2.9)}$$

называют *первым условием излучения.* При его выполнении

$$\frac{\partial\varphi(R)}{\partial R} + jk\varphi(R) = o\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0, \quad \text{(III.2.10)}$$

как R^{-n}, где $n > 1$. Кроме того, чтобы $\varphi(M_0) \xrightarrow[R_{M_0P} \to \infty]{} 0$, необходимо выполнение второго условия излучения:

$$\varphi(R) = O\left(\frac{1}{R}\right) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0, \quad \text{(III.2.11)}$$

как R^{-1}.

Используя (III.2.10), получаем *интегральное уравнение Гельмгольца для внешних точек пространства*

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int_f \left[\varphi(R_{M_0P}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mathrm{e}^{-jkR_{M_0P}}}{R_{M_0P}} - \frac{\mathrm{e}^{-jkR_{M_0P}}}{R_{M_0P}} \frac{\partial\varphi(R)}{\partial n}\right] df. \quad \text{(III.2.12)}$$

Нетрудно показать, что (III.2.12) может быть записано для звукового давления:

$$p(M) = -\frac{1}{4\pi} \int_f \left[p(r_{MP}) \frac{\partial}{\partial n} \frac{\mathrm{e}^{-jkr_{MP}}}{r_{MP}} - \frac{\mathrm{e}^{-jkr_{MP}}}{r_{MP}} \frac{\partial p(r_{MP})}{\partial n}\right] df. \quad \text{(III.2.13)}$$

Интеграл (III.2.12) определяет потенциал скорости в любой точке пространства по граничным значениям φ, $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$, а также по значениям функций $\frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{4\pi r}$ и $\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{\mathrm{e}^{-jkr}}{4\pi r}\right)$. Вспомогательная функция $\frac{\mathrm{e}^{\pm jkr}}{4\pi r}$ представляет собой элементарные сферические волны, входящие в граничную поверхность $(+jkr)$ или исходящие из нее $(-jkr)$. Второй интеграл в (III.2.12) дает вклад в общее поле, который вносят точечные излучатели, расположенные на поверхности и имеющие производительность $v_n\, df = -\frac{\partial\varphi}{\partial n} df$. Первый интеграл выражает потенциал поля, создаваемого диполями, распределенными по поверхности:

$$\int\limits_f \varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-jkr}}{r} df = -\int\limits_f \varphi \frac{1+ikr}{r^2} \frac{\partial r}{\partial n} e^{-jkr} df = \int\limits_f \varphi \frac{1+jkr}{r^2} \cos\alpha e^{-jkr} df,$$

где α — угол между направлениями из точки M_0 на элемент поверхности $df(P)$ и нормали к поверхности $\mathbf{n}$.

Для нахождения поля по (III.2.12) необходимо знать φ и $\partial\varphi/\partial n$ на поверхности преобразователя. Для того чтобы иметь эти два граничных условия одновременно, необходимо уже иметь решение задачи. В связи с этим интегральное уравнение Гельмгольца (III.2.12) не дает решения задач об излучении. Однако для высоких частот эта формула дает соотношения, которыми удобно пользоваться в практике инженерных расчетов.

Если длина волны значительно меньше линейных размеров поверхности, то сохраняется только одно граничное условие. В этом случае каждый участок поверхности df может быть выбран достаточно большим, чтобы считать, что каждая элементарная площадка испускает квазиплоские волны, и поэтому для них выполняется обычная связь между давлением и колебательной скоростью плоской волны $p = \rho c v_n$. Кроме того,

$$\varphi = \frac{1}{j\omega\rho} p = \frac{\rho c v_n}{j\omega\rho} = \frac{1}{jk} v_n, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = -v_n.$$

Подставляя эти формулы в интегральное уравнение Гельмгольца, получим его приближенное выражение для высоких частот — *интеграл Кирхгофа*:

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_f \left(\varphi \frac{\partial}{\partial n} \frac{e^{-jkr}}{r} - \frac{e^{-jkr}}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial n}\right) df = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_f \left(-\frac{v_n}{jk} \frac{1+jkr}{r^2} \times \right.$$
$$\left. \times \cos\alpha e^{-jkr} + \frac{e^{-jkr}}{r} v_n\right) df = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_f v_n (1-\cos\alpha) \frac{e^{-jkr}}{r} df.$$

Изменяя начало координат так, чтобы направление r_{M_0P} изменялось на 180°, получаем формулу Кирхгофа, удобную для расчетов поля высоких частот:

$$\varphi(r_{PM_0}) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_f v_n (1+\cos\theta) \frac{e^{-jkr}}{r} df, \qquad \text{(III.2.14)}$$

где интегрирование проводится по поверхности излучателя.