§ III.3. ФУНКЦИЯ ИСТОЧНИКОВ

Необходимость задания двух граничных условий для решения краевой задачи с помощью интеграла (III.2.12) можно устранить, если подобрать вспомогательную функцию $\psi(M_0)$.

Допустим, что потенциал в точке M_0 определяется интегралом Кирхгофа:

$$\varphi(M_0)=\frac{1}{4\pi}\int\limits_f\left[\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}\frac{\partial}{\partial n}\varphi(r_{M_0P})-\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}\right]df. \tag{III.3.1}$$

Запишем для рассматриваемой области формулу Грина:

$$\int\limits_f\left(\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}-\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)df=0, \tag{III.3.2}$$

где ψ — некоторая вспомогательная функция, удовлетворяющая уравнению Гельмгольца.

Складывая (III.3.1) и (III.3.2), получаем

$$\varphi(M_0)=\int\left[F(r_{M_0P})\frac{\partial\varphi(r_{M_0P})}{\partial n}-\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial F(r_{M_0P})}{\partial n}\right]df, \tag{III.3.3}$$

где

$$F(r_{M_0P})=\psi(r_{M_0P})+e^{-jkr_{M_0P}}/(4\pi r_{M_0P}). \tag{III.3.4}$$

Пользуясь некоторой неопределенностью в выборе вспомогательной функции $\psi(r_{M_0P})$, можно в интегральном выражении (III.3.3) освободиться от одного из граничных условий. С этой целью определим функцию выражением

$$F(r_{M_0M})=\psi(r_{M_0M})+e^{-jkr_{M_0M}}/(4\pi r_{M_0M}).$$

Нетрудно показать, что данная функция удовлетворяет уравнению Гельмгольца и конечна для всех точек $M\neq M_0$.

Если имеется первая краевая задача, т. е. на поверхности f задана функция $\varphi(r_{M_0P})$, то для упрощения интегрального решения (III.3.3) надо подобрать функцию $\psi(r_{M_0M})_{M\to P}=\psi(r_{M_0P})$ так, чтобы

$$\underset{M\to P}{F(r_{M_0M})}=G_1(r_{M_0P})=\psi(r_{M_0P})+e^{-jkr_{M_0P}}/(4\pi r_{M_0P})=0. \tag{III.3.5}$$

Здесь P — точка на поверхности f; M — точка внешней области; M_0 — точка, где $F\to\infty$ (рис. III.3.1).

Тогда интеграл (III.3.3) примет вид

$$\varphi(r_{M_0P})=-\int\limits_f\varphi(r_{M_0P})\frac{\partial G_1(r_{M_0P})}{\partial n}df.$$

Функцию $G_1(r_{M_0P})$ называют *функцией Грина первой краевой задачи.*

Если имеется второе краевое условие, т. е. на поверхности задана производная потенциала по нормали, то в качестве функции $F(r_{M_0M})$ находят такую, чтобы на поверхности исчезала ее производная:

$$\frac{\partial F(r_{M_0M})}{\partial n}\underset{M\to P}{=}\frac{\partial G_2(r_{M_0P})}{\partial n}=\frac{\partial\psi(r_{M_0P})}{\partial n}+\frac{\partial}{\partial n}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{4\pi r_{M_0P}}=0. \qquad \text{(III.3.6)}$$

При этом условии интегральное решение принимает вид

$$\varphi(r_{M_0P})=\int_f G_2(r_{M_0P})\frac{\partial\varphi(r_{M_0P})}{\partial n}df. \qquad \text{(III.3.7)}$$

Функцию $G_2(r_{M_0P})$ называют *функцией Грина второй краевой задачи.*

Функции Грина, или функции источников, обладают следующими свойствами:

1. Функции G_1 и G_2 должны быть решениями уравнения Гельмгольца во всех точках пространства, исключая M_0, где они обращаются в бесконечность.

2. Функция G_1 первой краевой задачи для точек поверхности f обращается в нуль. Функция Грина второй краевой задачи на поверхности f отлична от нуля. Однако исчезает производная по нормали ($\partial G_2/\partial n=0$).

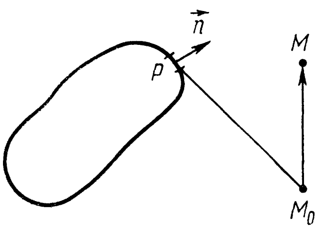

Рис. III.3.1

3. Каждая из функций Грина G_1 и G_2 содержит суперпозицию двух полей: точечного источника с производительностью, равной 1, и $\psi(r_{M_0P})$, представляющего собой поле сферической волны, рассеянной на поверхности f. Поля $\psi(M_0P)$ и точечного источника должны удовлетворять тому или иному граничному условию.

4. Функции Грина должны удовлетворять условиям излучения и, кроме того, быть непрерывными в любой точке пространства, не занятой источником.

Для построения функции Грина необходимо решить задачу о рассеянии поля точечного источника на заданной поверхности. Математическая формулировка этой задачи сводится к следующему: найти решение амплитудного волнового уравнения

$$\Delta G+k^2G=\delta(r_{M_0M}), \qquad \delta(r_{M_0M})=\begin{cases}0 & \text{при } M_0\neq M,\\ \infty & \text{при } M_0=M,\end{cases}$$

удовлетворяющее одному из граничных условий $G|_f=0$ или $\partial G/\partial n|_f=0$, условиям излучения и условию того, что это решение содержит суперпозицию поля точечного источника и некоторого дополнительного поля: $G=\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{4\pi r_{M_0P}}+\psi(r_{M_0P})$.