§ III.4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ ПЛОСКОСТИ

Найдем функцию Грина для полупространства, ограниченного плоскостью $Z=0$. Точечный источник M_0 (рис. III.4.1), помещенный в свободное пространство, создает сферическое поле. На безграничной плоской поверхности N_1N_2 сферические волны отражаются и создают дополнительное поле, являющееся полем зеркального изображения на плоскости действительного источника. В результате суперпозиции первичного и рассеянного полей получается полное поле точечного источника при наличии плоской поверхности

$$F(r_{M_0M})=\frac{e^{-jkr_{M_0M}}}{4\pi r_{M_0M}}+A\frac{e^{-jkr_{M_1M}}}{4\pi r_{M_1M}}, \qquad (III.4.1)$$

где M — точка полупространства; M_0 — положение точечного источника; M_1 — положение зеркального изображения точечного источника; A — постоянная, которую можно определить из граничных условий.

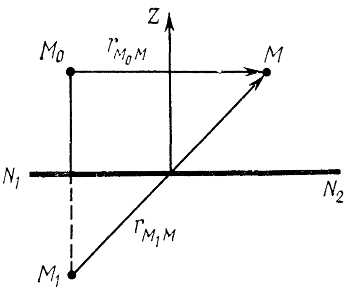

Рис. III.4.1

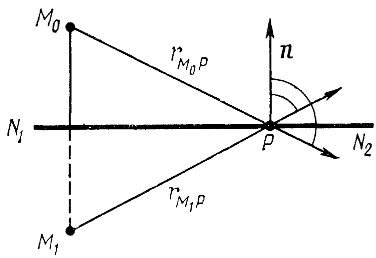

Рис. III.4.2

В зависимости от характера граничного условия из (III.4.1) получается первая или вторая функция Грина для полупространства. Для первой функции Грина должно выполняться условие (III.3.5). Расположив точку M на плоскости, получим

$$F(r_{M_0P})=\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{4\pi r_{M_0P}}+\frac{e^{-jkr_{M_1P}}}{4\pi r_{M_1P}}A, \qquad (III.4.2)$$

где r_{M_0P} — расстояние между точками M_0 и P, лежащими на плоскости N_1N_2; r_{M_1P} — расстояние от точки M (изображения источника) до P.

Так как $r_{M_0P}=r_{M_1P}$ (рис. III.4.2), то $\dfrac{e^{-jkr_{M_0P}}}{4\pi r_{M_0P}}(1+A)=0$,

следовательно $A=-1$.

Таким образом, первая функция Грина для полупространства имеет вид

$$G(M)=\frac{e^{-jkr_{M_0M}}}{4\pi r_{M_0M}}-\frac{e^{-jkr_{M_1M}}}{4\pi r_{M_1M}}. \qquad (III.4.3)$$

Производная по нормали от этой функции есть

$$\frac{\partial G_1}{\partial n}\Big|_{f\ M=P} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1+jkr_{M_0P}}{r_{M_0P}}\frac{\partial r_{M_0P}}{\partial n}e^{-jkr_{M_0P}} - \right.$$
$$\left. - \frac{1+jkr_{M_1P}}{r_{M_1P}}\frac{\partial r_{M_1P}}{\partial n}e^{-jkr_{M_1P}}\right).$$

Здесь каждая из производных $\partial r_{M_0P}/\partial n$ и $\partial r_{M_1P}/\partial n$ является косинусом угла между направлениями нормали $\mathbf{n}$ и векторами $\mathbf{r}_{M_0P}$ и $\mathbf{r}_{M_1P}$. Заметим, что угол $\widehat{\mathbf{n}r}_{M_0P}$ тупой, а угол $\widehat{\mathbf{n}r}_{M_1P}$ острый, дополняющий первый до 180°. Поэтому

$$\frac{\partial r_{M_0P}}{\partial n} = -\frac{\partial r_{M_1P}}{\partial n}. \qquad \text{(III.4.4)}$$

Принимая во внимание равенство $r_{M_0P}=r_{M_1P}$, получаем производную функции Грина для полупространства в точке P:

$$\frac{\partial G}{\partial n}\Big|_{M=P} = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r^2_{M_0P}}(1+jkr_{M_0P})\cos\left(\widehat{\mathbf{n}r}_{M_0P}\right). \qquad \text{(III.4.5)}$$

Интегральное представление решения первой краевой задачи имеет вид

$$\varphi(M_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_f \varphi(r_{M_0P})\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r^2_{M_0P}}(1+jkr_{M_0P})\cos\left(\widehat{\mathbf{n}r}_{M_0P}\right)df. \qquad \text{(III.4.6)}$$

Формула (III.4.6) представляет собой суперпозицию полей диполей, расположенных на плоскости и излучающих в пределах телесного угла 2π.

Для второй краевой задачи функцию Грина полупространства строят аналогично. В этом случае $F(M)$ должна удовлетворять второму граничному условию (III.3.6).

Производную от G_2 представляют формулой

$$\frac{\partial G_2(M)}{\partial n} = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1+jkr_{M_0M}}{r^2_{M_0M}}e^{-jkr_{M_0M}}\frac{\partial r_{M_0M}}{\partial n} + \right.$$
$$\left. + A\frac{1+jkr_{M_1M}}{r^2_{M_1M}}e^{-jkr_{M_1M}}\frac{\partial r_{M_1M}}{\partial n}\right). \qquad \text{(III.4.7)}$$

Для точек поверхности эта производная должна обращаться в нуль. Учитывая, что $\partial r_{M_0P}/\partial n = -\partial r_{M_1P}/\partial n$ (P — точка поверхности), находим

$$\left(\frac{1+jkr_{M_0P}}{r^2_{M_0P}}e^{-jkr_{M_0P}} - A\frac{1+jkr_{M_1P}}{r^2_{M_1P}}e^{-jkr_{M_1P}}\right)\frac{\partial r_{M_0P}}{\partial n} = 0. \qquad \text{(III.4.8)}$$

Уравнение (III.4.8) может быть выполнено при $\partial r_{M_0P}/\partial n \neq 0$, если $A=1$. Таким образом, выражение (III.4.2) при $A=1$ и есть *вторая функция Грина для полупространства*. Для любой точки плоской поверхности эта функция имеет вид

$$G_2(r_{M_0P}) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}. \qquad \text{(III.4.9)}$$

Используя (III.4.9), получаем решение второй краевой задачи для плоских источников:

$$\varphi(r_{M_0P}) = \frac{1}{2\pi} \int_f \frac{\partial\varphi}{\partial n} \frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}} df. \qquad \text{(III.4.10)}$$

Формула (III.4.10) имеет простой физический смысл и выражает принцип Гюйгенса — Френеля для плоских источников с бесконечно протяженным плоским экраном. Поле (III.4.10) представляет собой суперпозицию полей точечных источников, расположенных на участке безграничной поверхности и излучающих в область телесного угла 2π. В акустике выражение (III.4.10) называют *интегралом Рэлея.*

§ III.5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СФЕРЫ

Согласно определению, функция Грина внешней краевой задачи представляет собой функцию потенциала скорости поля точечного источника M_0 и поля, отраженного от заданной поверхности:

$$G(r_{M_0M}) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} + \psi(r, \theta, \varphi). \qquad \text{(III.5.1)}$$

Проведем расчет акустического поля в $M(r, \theta, \varphi)$, создаваемого точечным источником, помещенным в точкѐ $M_0(r_0, \theta, \varphi_0)$ при наличии акустически жесткой сферы (рис. III.5.1); r, θ и φ — сферические координаты точки наблюдения, r_0, θ и φ_0 — координаты точки источника; R — расстояние между источником и точкой наблюдения.

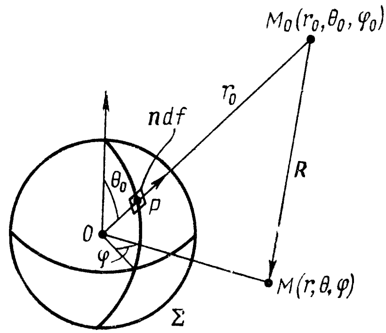

Рис. III.5.1

Функция, описывающая поле, должна удовлетворять уравнению

$$\Delta G + k^2 G = \delta(M_0 M), \qquad \text{(III.5.2)}$$

условию затухания на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial G}{\partial r} + jkG\right) = 0 \qquad \text{(III.5.3)}$$

и для жесткой сферы краевому условию

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \qquad \text{(III.5.4)}$$

где k — волновое число; $\delta(M_0M)$ — функция Дирака.

Полагая решение в виде суперпозиции сферического и рассеянного поля (III.5.1), получаем краевое условие для функции $\psi(r, \theta, \varphi)$:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\right)\Bigg|_{r=a} + \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0,$$