Используя (III.4.9), получаем решение второй краевой задачи для плоских источников:

$$\varphi(r_{M_0P}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_f \frac{\partial\varphi}{\partial n}\frac{e^{-jkr_{M_0P}}}{r_{M_0P}}\,df. \qquad (III.4.10)$$

Формула (III.4.10) имеет простой физический смысл и выражает принцип Гюйгенса — Френеля для плоских источников с бесконечно протяженным плоским экраном. Поле (III.4.10) представляет собой суперпозицию полей точечных источников, расположенных на участке безграничной поверхности и излучающих в область телесного угла 2π. В акустике выражение (III.4.10) называют *интегралом Рэлея.*

§ III.5. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ СФЕРЫ

Согласно определению, функция Грина внешней краевой задачи представляет собой функцию потенциала скорости поля точечного источника M_0 и поля, отраженного от заданной поверхности:

$$G(r_{M_0M}) = \frac{e^{-jkR}}{4\pi R} + \psi(r,\ \theta,\ \varphi). \qquad (III.5.1)$$

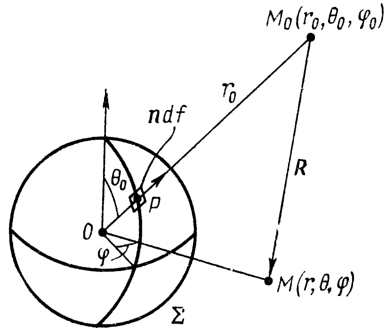

Рис. III.5.1

Проведем расчет акустического поля в $M(r,\ \theta,\ \varphi)$, создаваемого точечным источником, помещенным в точке $M_0(r_0,\ \theta,\ \varphi_0)$ при наличии акустически жесткой сферы (рис. III.5.1); r, θ и φ — сферические координаты точки наблюдения, r_0, θ и φ_0 — координаты точки источника; R — расстояние между источником и точкой наблюдения.

Функция, описывающая поле, должна удовлетворять уравнению

$$\Delta G + k^2 G = \delta(M_0M), \qquad (III.5.2)$$

условию затухания на бесконечности

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\frac{\partial G}{\partial r} + jkG\right) = 0 \qquad (III.5.3)$$

и для жесткой сферы краевому условию

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = 0, \qquad (III.5.4)$$

где k — волновое число; $\delta(M_0M)$ — функция Дирака.

Полагая решение в виде суперпозиции сферического и рассеянного поля (III.5.1), получаем краевое условие для функции $\psi(r,\ \theta,\ \varphi)$:

$$\left.\frac{\partial G}{\partial r}\right|_{r=a} = \left.\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\right)\right|_{r=a} + \left.\frac{\partial\psi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0,$$

откуда

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}\Big|_{r=a} = -\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{e^{-jkR}}{4\pi R}\right)\Big|_{r=a}. \qquad (III.5.5)$$

При этом функция ψ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца. Как известно, общее решение этого уравнения в сферических координатах представляет собой суперпозицию сферических волн всех порядков:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m(kr) P_m^{(n)}(\theta, \varphi), \qquad (III.5.6)$$

где h_m — вторая сферическая функция Ханкеля; $P_m^{(n)}(\theta, \varphi)$ — присоединенный полином Лежандра.

Для отыскания всех коэффициентов A_m воспользуемся разложением сферической волны:

$$\frac{e^{-jkR}}{R} = -jk\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\cos[n(\varphi-\varphi_0)]\times$$

$$\times P_m^n(\cos\theta)P_m^n(\cos\theta_0)\begin{cases} j_m(kr_0)h_m(kr) & (r>r_0), \\ j_m(kr)h_m(kr_0) & (r<r_0), \end{cases} \qquad (III.5.7)$$

где $\varepsilon_n = \begin{cases} 1 \text{ при } n=0, \\ 2 \text{ при } n\neq 0. \end{cases}$

Подставляя в (III.5.5) вместо e^{-jkR}/R ряд (III.5.7), а вместо $\psi(r, \theta, \varphi)$ ряд (III.5.6), получаем функцию Грина для сферической поверхности:

$$G_2 = -jk\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n\frac{(m-n)!}{(m+n)!}\cos[n(\varphi-\varphi_0)]P_m^n(\cos\theta)\times$$

$$\times P_m^n(\cos\theta_0)h_m(kr)[j_m(kr_0)h'_m(ka)-j'_m(ka)h_m(kr_0)]\frac{1}{h'_m(ka)}. \qquad (III.5.8)$$

Функция (III.5.8) позволяет записать интегральное решение задачи об излучении упругих волн жесткой сферической поверхностью, если задана нормальная составляющая скорости на поверхности сферы:

$$\psi(r, \theta, \varphi) = \int_{\varphi_0=-\pi}^{+\pi}\int_{\theta_0=0}^{\pi} a^2 v_0(\varphi_0\theta_0)G_2(r, \theta, \varphi, r_0=a)\sin\theta_0\, d\varphi_0\, d\theta_0.$$

В то же время (III.5.8) является решением некоторых частных задач. Например, приняв $r=a$, из (III.5.8) получим формулу потенциала поля точечного источника. Как показано в [24], с помощью функции Грина для сферы сравнительно просто рассчитывается поле, создаваемое кольцевым излучателем при наличии отражающей сферы. С этой целью достаточно функцию (III.5.8) проинтегрировать по φ в пределах от 0 до 2π. В результате получим формулу потенциала поля кольцевого источника при наличии сферы:

$$\psi = -2\pi k r_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\, \varepsilon_m P_m(\cos\theta_0)\, P_m(\cos\theta_0)\, h_m(kr) \times$$
$$\times \left[j_m(kr_0) - \frac{j'(ka)\, h_m(kr_0)}{h'_m(ka)} \right]. \qquad \text{(III.5.9)}$$

Для акустически мягкой сферы функция Грина имеет вид

$$G_1 = -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \cos[n(\varphi-\varphi_0)]\, P_m^n(\cos\theta) \times$$
$$\times P_m^n(\cos\theta_0) \frac{h_m(kr)}{h_m(ka)} [h_m(ka)\, j_m(kr) - h_m(kr_0)\, j_m(ka)]. \qquad \text{(III.5.10)}$$

Поле кольцевого источника в присутствии мягкой сферы имеет вид

$$\psi(r,\ \theta,\ \varphi,\ t) = e^{j\omega t} \int_{-\pi}^{+\pi} G_1(r,\ \varphi,\ \theta)\, r_0 \sin\theta_0\, d\varphi_0 \qquad \text{(III.5.11)}$$

[r_0, θ_0 и φ_0 — координаты точек кольцевого излучателя; r, θ и φ — координаты точки наблюдения; $G_1(r,\ \theta,\ \varphi)$ — функция, определяемая формулой (III.5.10)].

Определив функцию давления на поверхности сферы

$$p(a,\ \theta,\ \varphi_0) = j\omega\rho\psi(a,\ \theta,\ \varphi_0),$$

получим формулу для звукового давления, создаваемого движением поверхности мягкой сферы:

$$p(r,\ \theta,\ \varphi,\ t) = e^{j\omega t} \int_f p(a,\ \theta,\ \varphi_0) \left.\frac{\partial G_1}{\partial r}\right|_{r_0=a} df. \qquad \text{(III.5.12)}$$

§ III.6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Использование метода функций Грина для решения краевых задач позволяет произвести расчет дальнего поля по измерениям звукового давления или колебательной скорости в ближнем поле.

Допустим, что функция, описывающая распределение давления вблизи излучателя, экспериментально найдена в виде $f(M^*)$. Кроме того, известна функция Грина для данной поверхности. В этом случае поле, создаваемое поверхностью σ^*, в точке M определяют формулой

$$\psi(M) = \int_{\sigma^*} f(M^*) \frac{\partial G(M,\ M^*)}{\partial n} d\sigma^*. \qquad \text{(III.6.1)}$$

В качестве излучателей часто применяют цилиндрические системы, поэтому построение функции Грина для цилиндра представляет собой важную задачу.