поля кольцевого источника при наличии сферы:

$$\psi = -2\pi k r_0 \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1)\,\varepsilon_m P_m(\cos\theta_0)\, P_m(\cos\theta_0)\, h_m(kr) \times$$
$$\times \left[j_m(kr_0) - \frac{j'(ka)\, h_m(kr_0)}{h'_m(ka)} \right]. \qquad \text{(III.5.9)}$$

Для акустически мягкой сферы функция Грина имеет вид

$$G_1 = -jk \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \sum_{n=0}^{m} \varepsilon_n \frac{(m-n)!}{(m+n)!} \cos[n(\varphi-\varphi_0)]\, P_m^n(\cos\theta) \times$$
$$\times P_m^n(\cos\theta_0) \frac{h_m(kr)}{h_m(ka)} [h_m(ka)\, j_m(kr) - h_m(kr_0)\, j_m(ka)]. \qquad \text{(III.5.10)}$$

Поле кольцевого источника в присутствии мягкой сферы имеет вид

$$\psi(r,\ \theta,\ \varphi,\ t) = e^{j\omega t} \int_{-\pi}^{+\pi} G_1(r,\ \varphi,\ \theta)\, r_0 \sin\theta_0\, d\varphi_0 \qquad \text{(III.5.11)}$$

[r_0, θ_0 и φ_0 — координаты точек кольцевого излучателя; r, θ и φ — координаты точки наблюдения; $G_1(r,\ \theta,\ \varphi)$ — функция, определяемая формулой (III.5.10)].

Определив функцию давления на поверхности сферы

$$p(a,\ \theta,\ \varphi_0) = j\omega\rho\psi(a,\ \theta,\ \varphi_0),$$

получим формулу для звукового давления, создаваемого движением поверхности мягкой сферы:

$$p(r,\ \theta,\ \varphi,\ t) = e^{j\omega t} \int_f p(a,\ \theta,\ \varphi_0) \left.\frac{\partial G_1}{\partial r}\right|_{r_0=a} df. \qquad \text{(III.5.12)}$$

§ III.6. ПОСТРОЕНИЕ ПЕРВОЙ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Использование метода функций Грина для решения краевых задач позволяет произвести расчет дальнего поля по измерениям звукового давления или колебательной скорости в ближнем поле.

Допустим, что функция, описывающая распределение давления вблизи излучателя, экспериментально найдена в виде $f(M^*)$. Кроме того, известна функция Грина для данной поверхности. В этом случае поле, создаваемое поверхностью σ^*, в точке M определяют формулой

$$\psi(M) = \int_{\sigma^*} f(M^*) \frac{\partial G(M,\ M^*)}{\partial n} d\sigma^*. \qquad \text{(III.6.1)}$$

В качестве излучателей часто применяют цилиндрические системы, поэтому построение функции Грина для цилиндра представляет собой важную задачу.

В цилиндрической системе координат ρ, φ и z функция Грина должна удовлетворять уравнению

$$\Delta G + k^2 G = -\frac{\delta(\rho-\rho^*)}{\rho}\delta(\varphi-\varphi^*)\delta(z-z^*) \qquad (III.6.2)$$

в областях $a \leqslant \rho < \infty$, $\pi < \varphi \leqslant \pi$ и $-\infty < z < \infty$, условию излучения и краевому условию

$$G|_{\rho=a} = 0. \qquad (III.6.3)$$

Здесь ρ^*, φ^* и z^* — координаты источника; ρ, φ и z — координаты точки наблюдения.

Выполнив интегральное преобразование Фурье над (III.6.2) и (III.6.3) по координате z:

$$\bar{G} = \int\limits_{-\infty}^{\infty} G e^{-j\tau z}\,dz, \quad \bar{G}|_{\rho=a} = 0,$$

получим уравнение задачи:

$$\begin{gathered}\Delta\bar{G} + \nu^2\bar{G} = -\frac{\delta(\rho-\rho^*)}{\rho}\delta(\varphi-\varphi^*)\,e^{-j\pi k z^*},\\ \bar{G}|_{\rho=a} = 0,\end{gathered} \qquad (III.6.4)$$

где $\nu^2 = k^2 - \tau^2$.

Решение (III.6.4), имеющее разрывы при $\rho=\rho^*$ и $\varphi=\varphi^*$, может быть представлено в виде

$$\bar{G} = +\frac{1}{4j}\sum_{m=-\infty}^{\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi^*)} e^{j\tau z^*}\left[\mathcal{J}_m(\nu\rho) - \frac{\mathcal{J}_m(\nu a)\,H_m(\nu\rho)}{H_m(\nu a)}\right]\times$$

$$\times H_m(\nu\rho^*) \quad (\rho<\rho^*), \quad \left[\mathcal{J}_m(\nu\rho^*) - \frac{\mathcal{J}_m(\nu a)\,H_m(\nu\rho^*)}{H_m(\nu a)}\right] H_m(\nu\rho) \quad (\rho>\rho^*).$$

Выполняя обратное преобразование Фурье, получаем искомую функцию:

$$G = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\bar{G} e^{j\tau z}\,d\tau.$$

Этот интеграл для дальнего поля преобразуется к виду, удобному для анализа:

$$G = \frac{e^{-jkr}}{4\pi r}\sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-jm(\varphi-\varphi^*)} e^{j\frac{\pi m}{2}} e^{-jkz^*\sin\theta}\left[\mathcal{J}_m(k\rho^*\cos\theta) - \right.$$

$$\left. - \frac{\mathcal{J}_m(ka\cos\theta)\,H_m(k\rho^*\cos\theta)}{H_m(ka\cos\theta)}\right]. \qquad (III.6.5)$$

Как и ранее, функцию (III.6.5) можно применять для ряда задач, например, вычислить потенциал поля системы точечных излучателей, образующих кольцо, соосное с цилиндром. Очевидно, дальнее поле определится интегралом

$$\psi=\int lG\rho\, d\varphi = l\frac{e^{-jkz}}{2r}e^{-jkz^*\sin\theta}\Big[\mathcal{J}_0(k\rho^*\cos\theta)-
-\frac{\mathcal{J}_0(ka\cos\theta)H_0(k\rho\cos\theta)}{H_0(ka\cos\theta)}\Big], \qquad \text{(III.6.6)}$$

где l — линейная плотность излучателей на кольце.

Наконец, дифференцируя (III.6.5) по ρ^* и подставляя $\rho^*=a$, получаем

$$\frac{\partial G}{\partial\rho^*}\Big|_{\rho^*=a}=\frac{e^{-j\left(kr-\frac{\pi}{2}\right)}}{\pi^2 ra}e^{-jkz^*\sin\theta}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-jm(\varphi-\varphi^*)}e^{j\frac{\pi m}{2}}}{H_m(ka\cos\theta)}. \qquad \text{(III.6.7)}$$

Таким образом, если известно распределение звукового давления в непосредственной близости к поверхности цилиндра, то, применяя формулу поля первой краевой задачи (III.6.1), получаем формулы для пересчета функции ближнего поля в функции для областей, удаленных от поверхности излучателя.

ГЛАВА IV
ИЗЛУЧЕНИЕ ПЛОСКИМИ ИСТОЧНИКАМИ

§ IV.1. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО ПОРШНЕВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Допустим, что в плоский жесткий экран на одном уровне с ним вставлен плоский излучатель, все точки которого имеют нормальную составляющую скорости, соответствующую реальной части функции $v_n e^{j\omega t}$. Требуется найти звуковое поле в полупространстве, ограниченном плоским экраном.

Для решения задачи воспользуемся интегралом Рэлея (III.4.10). Сначала найдем потенциал поля в точке P, находящейся на большом расстоянии от источника.

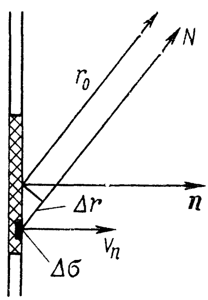

Рис. IV.1.1

Если точка наблюдения лежит от плоского источника на большом расстоянии, то направления из этой точки на любой элемент поверхности излучателя составляют с нормалью одинаковый угол. На рис. IV.1.1 показано общее для всех элементов направление на точку наблюдения N. Обозначив расстояние от начала координат через r_0, расстояние от элемента $\Delta\sigma$ — через $r=r_0+\Delta r$, получим интеграл в виде

$$\Psi=\frac{v_n}{2\pi}\int_\sigma\frac{e^{-jk(r_0+\Delta r)}}{r_0+\Delta r}d\sigma. \qquad \text{(IV.1.1)}$$