

к общей формуле

$$K = \frac{2}{\int_0^\pi \Phi^2(\theta) \sin \theta d\theta}. \quad (\text{IV.1.10})$$

Внимательное исследование этих соотношений позволяет сделать следующие выводы о свойствах дальнего поля поршневого плоского излучателя в экране: амплитуды колебательной скорости и звукового давления убывают с расстоянием по такому же закону, который имеется для сферической волны, возбуждаемой пульсирующим шаром. Отличие от закона шаровой волны заключается в том, что амплитуда волны поршневого излучателя зависит от направления. По осевому направлению амплитуда имеет наибольшее значение: она вдвое больше, чем амплитуда волны, создаваемой пульсирующим шаром той же производительности, но без экрана. Это значит, что фаза волн, отраженных от экрана в направлении оси, совпадает с фазой бегущих волн, так что в результате интерференции амплитуда волны удваивается. В других направлениях такого совпадения фаз не существует, поэтому интерференция волн приводит к определенной зависимости амплитуды от направления, выражаемой характеристикой направленности  $\Phi(\theta)$ .

#### § IV.2. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ КРУГЛОГО И ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ В ЭКРАНЕ

Формулы (IV.1.5) — (IV.1.9) применимы к плоским поршневым излучателям: круглому, прямоугольному, эллиптическому и др. При этом необходимо, чтобы излучатель был вмонтирован в бесконечно протяженный жесткий звуконепроницаемый плоский экран.

Отличие полей излучения в дальней зоне, создаваемых различными плоскими излучателями, состоит в различии функций направленности. Функции направленности круглого, прямоугольного, эллиптического, щелевого и других излучателей можно вычислить с помощью (IV.1.4).

Найдем функции направленности круглого и прямоугольного излучателей.

**Функция направленности круглого поршневого излучателя в экране:** На рис. IV.2.1 показано геометрическое построение, из которого следует:

$$d\sigma = \rho d\rho d\varphi, \quad \sigma = \pi a^2,$$

$$\Delta r = DB = AC = OA \sin \theta, \quad OA = \rho \cos \varphi, \quad \Delta r = \rho \cos \varphi \sin \theta.$$

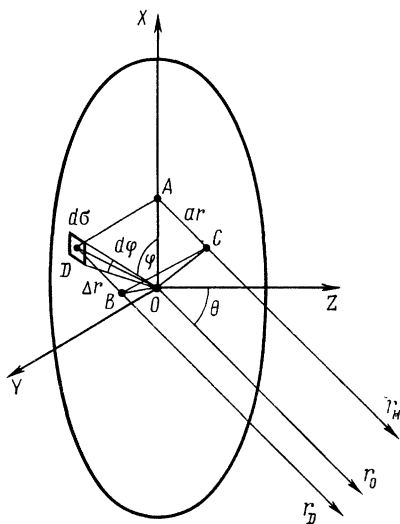


Рис. IV.2.1

Подставляя  $d\sigma$ ,  $\sigma$  и  $\Delta r$  в (IV.1.4), получаем

$$\Phi(\theta) = \frac{1}{\sigma} \int_{\sigma} e^{jk\Delta r} d\sigma = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} (e^{-jk\rho \sin\theta \cos\varphi} d\varphi) \rho d\rho. \quad (\text{IV.2.1})$$

Для определения интеграла воспользуемся преобразованием

$$\int_0^{2\pi} e^{-jk\rho \sin\theta \cos\varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} \cos(k\rho \sin\theta \cos\varphi) d\varphi - j \int_0^{2\pi} \sin(k\rho \sin\theta \cos\varphi) d\varphi \quad (\text{IV.2.2})$$

и соотношениями из теории специальных функций:

$$Z_m(z) = \frac{2(z/2)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) \sin^{2m} t dt, \quad (\text{IV.2.3})$$

$$S_m(z) = \frac{2(z/2)^m}{\sqrt{\pi} \Gamma(m+1/2)} \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos t) \sin^{2m} t dt, \quad (\text{IV.2.4})$$

$$\int z Z_0(z) dz = z Z_1(z), \quad (\text{IV.2.5})$$

где  $Z_m$  — символ цилиндрических функций  $m$ -го порядка;  $S_m$  — символ функций Струве  $m$ -го порядка;  $\Gamma$  — гамма-функция [ $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ ;  $\Gamma(1) = 1$ ].

Для нахождения амплитудной характеристики направленности ограничимся действительной частью комплексной функции (IV.2.2):

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{+jk\rho \sin\theta \cos\varphi} d\varphi &= \int_0^{2\pi} \cos(k\rho \sin\theta \cos\varphi) d\varphi = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \cos(k\rho \sin\theta \cos\varphi) d\varphi. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.6})$$

Если положить в (IV.2.3)  $m=0$ , то  $\mathcal{S}_0(z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos(z \cos t) dt$ .

Таким образом,

$$\operatorname{Re} \int_0^{2\pi} e^{-jk\rho \sin\theta \cos\varphi} d\varphi = 2\pi \mathcal{S}_0(k\rho \sin\theta). \quad (\text{IV.2.7})$$

Используя (IV.2.7), получим (IV.2.1) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\theta) &= \frac{1}{\pi a^2} 2\pi \int_0^a \mathcal{S}_0(k\rho \sin\theta) \rho d\rho = \\ &= \frac{2}{a^2} \frac{1}{k^2 \sin^2 \theta} \int_0^{ka \sin\theta} \mathcal{S}_0(z) z dz = \frac{2ka \sin\theta}{a^2 k^2 \sin^2 \theta} \mathcal{S}_1(ka \sin\theta), \\ \Phi(\theta) &= \frac{2\mathcal{S}_1(ka \sin\theta)}{ka \sin\theta}. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.8})$$

График функции  $|2\mathcal{F}_1(x)|/x$  представлен на рис. IV.2.2, где значения функции при  $0 \leq x \leq 3,5$  представлены кривой 1, а значения при  $0 \leq x \leq 14$  — кривой 2. На рис. IV.2.3 изображены полярные диаграммы направленности круглого поршневого излучателя в экране для различных значений отношения диаметра излучателя к длине волны.

Аргумент функций направленности существенно зависит не только от угла  $\theta$ , но и от волнового фактора  $ka$ , так что диаграмма направленности в полярных координатах представляет собой ту или иную кривую в зависимости от численного значения параметра  $ka$ . Например, при  $ka=0,5$  аргумент функции направленности меняется от 0 при  $\theta=0^\circ$  до 0,5 при  $\theta=90^\circ$ , а сама функция уменьшается от 1 до 0,97. Диаграмма направленности имеет вид, близкий к полусфере. При  $ka=1$  аргумент меняется от 0 до 1 и диаграмма направленности представляет собой слегка вытянутую полусферу. При  $\theta=90^\circ$   $\Phi(\theta)=0,87$ . При  $ka=5$  аргумент функции изменяется от 0 до 5, а функция при  $ka \sin \theta = 3,83$  обращается в нуль и достигает 0,13 при угле  $90^\circ$ . Диаграмма имеет вытянутую форму.

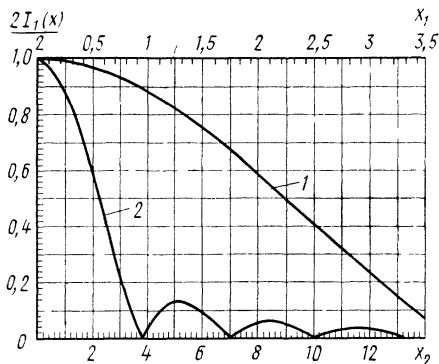


Рис. IV.2.2

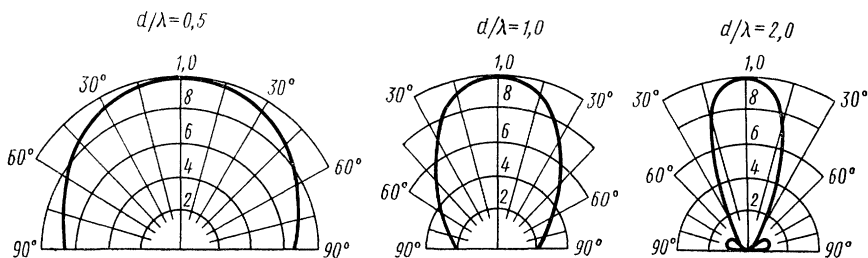


Рис. IV.2.3

При дальнейшем увеличении параметра  $ka$  острота диаграммы направленности увеличивается. Угол раскрытия главного направления излучения определяют первым корнем функции  $2\mathcal{F}_1(x)/x$ :

$$Z_1 = ka \sin \theta_1 = 1,2\pi; \quad \sin \theta_1 = 0,6\lambda/a.$$

Если, например, отношение длины волны к радиусу излучателя составляет малое число (допустим, 0,1), то

$$\sin \theta_1 \approx \theta_1 \approx 0,06 \text{ рад} = 0,06 \frac{180'}{3,14} = 6 \frac{1,80}{3,14} \approx 3,5'.$$

Основное излучение происходит в телесный угол с раскрытием

$$-\arcsin(0,61\lambda/a) < \theta < +\arcsin(0,61\lambda/a).$$

Кроме основного направления излучения ( $\theta = 0$ ) плоский излучатель создает волну под углами, ограниченными добавочными лепестками. Это излучение, хотя и составляет небольшую часть от полного (7%), во многих случаях нежелательно. Дополнительные лепестки на плоской диаграмме направленности можно устранить, если обеспечить определенное амплитудное распределение колебаний поверхности плоского преобразователя.

Подставляя в формулы поля плоского излучателя (IV.1.5) — (IV.1.9) найденную функцию направленности, получаем формулы поля круглого поршневого излучателя в экране.

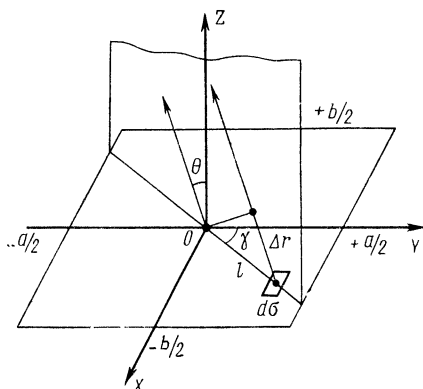


Рис. IV.2.4

**Прямоугольный поршневой излучатель.** Для нахождения функции направленности прямоугольного поршневого излучателя расположим прямоугольную систему координат так, чтобы начало лежало в центре преобразователя, а ось была направлена по нормали (рис. IV.2.4).

Построим плоскость, проходящую перпендикулярно поверхности преобразователя через начало координат  $O$  и элемент поверхности  $d\sigma(x, y)$ . Направление на точку наблюдения будет составлять некоторый полярный угол  $\theta$ , лежащий в этой плоскости. Выберем в виде прямоугольника  $dx dy$  элемент площади  $d\sigma$  и выразим разность путей луча  $dr$  через углы  $\theta, \gamma$  и координаты точки  $x, y$ . Из геометрических построений следует  $\Delta r = l \sin \theta$ ,  $l = y \cos \gamma + x \sin \gamma$ , откуда

$$\Delta r = x \sin \gamma \sin \theta + y \cos \gamma \sin \theta$$

и функция направленности для прямоугольного излучателя в экране имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{1}{ab} \int_{-a/2}^{+a/2} \exp(-jkx \sin \gamma \sin \theta) dx \int_{-b/2}^{+b/2} \exp(-jky \cos \gamma \sin \theta) dy = \\ &= \frac{\sin [(ka/2) \sin \gamma \cos \theta]}{(ka/2) \sin \gamma \cos \theta} \frac{\sin [(kb/2) \cos \gamma \sin \theta]}{(kb/2) \cos \gamma \sin \theta}. \end{aligned} \quad (\text{IV.2.9})$$

Можно показать, что  $\sin \gamma \sin \theta = \sin \alpha$ ,  $\cos \gamma \sin \theta = \sin \beta$  ( $\alpha$  и  $\beta$  — проекции полярного угла на плоскостях  $ZOX$  и  $ZOY$  соответственно). Если воспользоваться этими соотношениями, то получим выражение

для функции направленности через углы  $\alpha$  и  $\beta$ :

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{\sin[(\pi/\lambda) a \sin \alpha]}{(\pi/\lambda) a \sin \alpha} \frac{\sin[(\pi/\lambda) b \sin \beta]}{(\pi/\lambda) b \sin \beta}. \quad (\text{IV.2.10})$$

Формула (IV.2.10) совпадает с формулой распределения амплитуды светового вектора (напряженности электрического поля) при дифракции света на прямоугольном отверстии.

### § IV.3. ИМПЕДАНС И КОЭФФИЦИЕНТ ОСЕВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ КРУГЛОГО ПОРШНЕВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ЭКРАНЕ

Согласно определению, *импеданс излучателя* есть отношение комплексной реакции поля излучения, действующей в направлении движения, к колебательной скорости точки приведения.

Применительно к поршневым излучателям в экране точкой приведения может быть любая точка поверхности излучателя. Движение излучателя осуществляется по направлению его оси, поэтому вектор приведенной скорости точек поверхности равен единице. Исходя из этих соображений, вычисляем импеданс плоского преобразователя как отношение

$$z = \frac{1}{v_n} \int_{\sigma} p \, d\sigma,$$

где  $v_n$  — амплитуда скорости поверхности преобразователя;  $p$  — комплексное звуковое давление на поверхности.

Вообще говоря, амплитуда и фаза давления  $p$  в различных точках поверхности излучателя различны и являются функциями координат точек поверхности. Для нахождения этой функции воспользуемся интегралом (Гюйгенса — Френеля) Рэлея:

$$p_B = j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_{\sigma} \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} \, d\sigma, \quad (\text{IV.3.1})$$

где  $A$  и  $B$  — точки, лежащие на поверхности излучателя.

Для того чтобы при интегрировании по формуле (IV.3.1) избежать особенностей (они возникнут, когда точки  $A$  и  $B$  совпадут), разобьем всю поверхность излучателя на области точек действия звукового давления ( $B$ ) и излучателей ( $A$ ) (рис. IV.3.1, а).

Очевидно, сила реакции поля на область  $B$  выразится двойным интегралом поверхности, занятой точками  $B$ :

$$\begin{aligned} F_B &= \int_B p_B \, d\sigma_B = \int_B \left( j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_A \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} \, d\sigma_A \right) d\sigma_B = \\ &= j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_B \left( \int_A \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} \, d\sigma_A \right) d\sigma_B. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2})$$

Однако  $F_B$  составляет только часть реакции поля. Она представляет собой реакцию поля источников (занимающих область  $A$ ), дей-