

для функции направленности через углы α и β :

$$\Phi(\alpha, \beta) = \frac{\sin[(\pi/\lambda) a \sin \alpha]}{(\pi/\lambda) a \sin \alpha} \frac{\sin[(\pi/\lambda) b \sin \beta]}{(\pi/\lambda) b \sin \beta}. \quad (\text{IV.2.10})$$

Формула (IV.2.10) совпадает с формулой распределения амплитуды светового вектора (напряженности электрического поля) при дифракции света на прямоугольном отверстии.

§ IV.3. ИМПЕДАНС И КОЭФФИЦИЕНТ ОСЕВОЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ДЛЯ КРУГЛОГО ПОРШНЕВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ В ЭКРАНЕ

Согласно определению, *импеданс излучателя* есть отношение комплексной реакции поля излучения, действующей в направлении движения, к колебательной скорости точки приведения.

Применительно к поршневым излучателям в экране точкой приведения может быть любая точка поверхности излучателя. Движение излучателя осуществляется по направлению его оси, поэтому вектор приведенной скорости точек поверхности равен единице. Исходя из этих соображений, вычисляем импеданс плоского преобразователя как отношение

$$z = \frac{1}{v_n} \int_{\sigma} p \, d\sigma,$$

где v_n — амплитуда скорости поверхности преобразователя; p — комплексное звуковое давление на поверхности.

Вообще говоря, амплитуда и фаза давления p в различных точках поверхности излучателя различны и являются функциями координат точек поверхности. Для нахождения этой функции воспользуемся интегралом (Гюйгенса — Френеля) Рэлея:

$$p_B = j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_{\sigma} \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} \, d\sigma, \quad (\text{IV.3.1})$$

где A и B — точки, лежащие на поверхности излучателя.

Для того чтобы при интегрировании по формуле (IV.3.1) избежать особенностей (они возникнут, когда точки A и B совпадут), разобьем всю поверхность излучателя на области точек действия звукового давления (B) и излучателей (A) (рис. IV.3.1, а).

Очевидно, сила реакции поля на область B выразится двойным интегралом поверхности, занятой точками B :

$$\begin{aligned} F_B &= \int_B p_B \, d\sigma_B = \int_B \left(j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_A \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} \, d\sigma_A \right) d\sigma_B = \\ &= j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_B \left(\int_A \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} \, d\sigma_A \right) d\sigma_B. \end{aligned} \quad (\text{IV.3.2})$$

Однако F_B составляет только часть реакции поля. Она представляет собой реакцию поля источников (занимающих область A), дей-

ствующую на область поверхности B . Для получения полной реакции поля необходимо к реакции F_B прибавить реакцию F_A поля источников, находящихся в области B и действующих на площадь, занятую областью A . Нетрудно видеть, что

$$F_A = j \frac{\rho c v_n}{\lambda} \int_{\sigma_A} \left(\int_{\sigma_B} \frac{e^{-jkr_{BA}}}{r_{BA}} d\sigma_B \right) d\sigma_A. \quad (IV.3.3)$$

Таким образом, полная реакция поля может быть рассчитана по формуле

$$F = F_B + F_A = j \frac{2\rho c v_n}{\lambda} \int_{\sigma_A} \left(\int_{\sigma_A} \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} d\sigma_A \right) d\sigma_B. \quad (IV.3.4)$$

На рис. IV.3.1, б изображена поверхность круглого излучателя. Она разделена на две части: кольцевую B и центральную A с радиу-

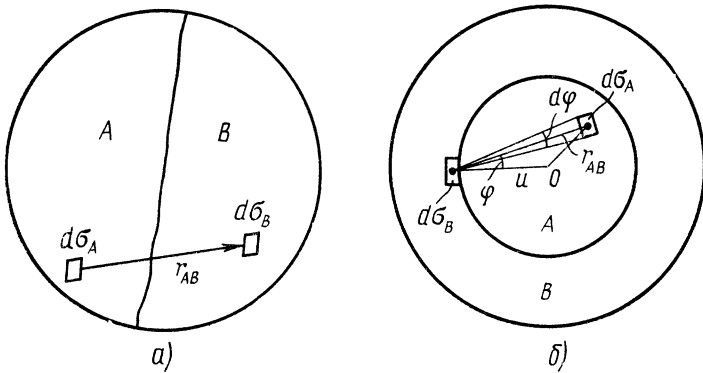


Рис. IV.3.1

сом u . Расположим элементарную площадку $d\sigma_B$ так, чтобы она примыкала к окружности, разграничивающей области A и B . Звуковое давление в точке $d\sigma_B$, создаваемое источниками, расположенными в пределах центральной области, равно

$$p_{d\sigma_B} = j \frac{2\rho c v_n}{\lambda} \int_{\sigma_A} \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} d\sigma_A.$$

Элемент площади $d\sigma_A = r_{AB} d\varphi dr_{AB}$, поэтому

$$\begin{aligned} & \int_{\sigma_A} \frac{e^{-jkr_{AB}}}{r_{AB}} d\sigma_{AB} = \\ & = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} d\varphi \int_0^{2u \cos \varphi} e^{-jkr} dr = 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi \left(-\frac{1}{jk} e^{-jkr} \right) \Big|_0^{2u \cos \varphi} = \\ & = \frac{2j}{k} \int_0^{\pi/2} (e^{-2jku \cos \varphi} - 1) d\varphi = \frac{2j}{k} \left(I_1 - \frac{\pi}{2} \right), \end{aligned}$$

где $I_1 = \int_0^{\pi/2} e^{2jku \cos \varphi} d\varphi$ — комплексная функция от ku Действительная часть этой функции согласно (VI.2.3) и (IV.2.4) равна $\frac{\pi}{2} \mathcal{J}_0(2ku)$, мнимая $\frac{\pi}{2} S_0(2ku)$, $S_0(2ku)$ — функция Струве нулевого порядка, т. е.

$$\int_0^{\pi/2} \cos(z \cos \varphi) d\varphi - j \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos \varphi) d\varphi = \int_0^{\pi/2} e^{-jz \cos \varphi} d\varphi,$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos(z \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} \mathcal{J}_0(z), \quad (\text{IV.3.5})$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin(z \cos \varphi) d\varphi = \frac{\pi}{2} S_0(z).$$

Используя интегральные представления функций \mathcal{J}_0 и S_0 (IV.3.5), получаем

$$\rho_{d\sigma_B} = j \frac{2\rho c v_n}{\lambda} \frac{2j}{k} \left[\frac{\pi}{2} \mathcal{J}_0(2ku) - j \frac{\pi}{2} S_0(2ku) - \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= \rho c v_n [1 - \mathcal{J}_0(2ku) + j S_0(2ku)]. \quad (\text{IV.3.6})$$

Полная реакция поля на всю поверхность излучателя выражается интегралом ρ_B , взятым по всей области B :

$$F = \int_{\sigma_B} \rho_{d\sigma(B)} d\sigma(B) = 2\pi \int_0^a \rho c v_n [1 - \mathcal{J}_0(2ku) + j S_0(2ku)] u du =$$

$$= \pi \rho c v_n a^2 \left[1 - \frac{2\mathcal{J}_1(2ka)}{2ka} + j \frac{2S_1(2ka)}{2ka} \right]. \quad (\text{IV.3.7})$$

Разделив (IV.4.7) на амплитуду скорости v_n , получим формулу импеданса поршневого излучателя в экране:

$$Z = \frac{F}{v_n} = \rho c \pi a^2 \left[1 - \frac{2\mathcal{J}_1(2ka)}{2ka} + \frac{2S_1(2ka)}{2ka} \right], \quad (\text{IV.3.8})$$

или

$$Z = \rho c \sigma (x + jy),$$

где

$$x = 1 - \frac{2\mathcal{J}_1(2ka)}{2ka} = \frac{(ka)^2}{2} \left[1 - \frac{(ka)^2}{6} + \frac{(ka)^4}{72} - \dots \right],$$

$$y = \frac{2S_1(2ka)}{2ka} = \frac{8ka}{3\pi} \left[1 - \frac{4(ka)^2}{15} + \frac{16(ka)^4}{525} - \dots \right] \quad (\text{IV.3.9})$$

— безразмерные активная и реактивная составляющие импеданса.

Для низких частот ($ka < 2$) в формулах импеданса можно ограничиться первыми тремя членами (IV.3.9), а при $ka \ll 1$ — только первым членом $x \approx \frac{(ka)^2}{2}$, $y \approx \frac{8ka}{3\pi}$. Для средних и высоких частот следует пользоваться таблицами [6].

В пределе $ka \rightarrow \infty$ формулы импеданса упрощаются, поскольку в них войдут асимптотические выражения функций Бесселя и Струве:

$$\frac{2\mathcal{J}_1(z)}{z} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{1}{2z}, \quad \frac{2S_1(z)}{z} \underset{z \rightarrow \infty}{\approx} \frac{2}{\pi z}.$$

Таким образом, импеданс круглого поршневого преобразователя высоких частот определяется формулами

$$x \underset{2ka \rightarrow \infty}{\approx} 1; \quad y \underset{2ka \rightarrow \infty}{\approx} 0.$$

На рис. IV.3.2 даны графики составляющих $x_1 = \rho c x$, $y_1 = \rho c y$ импеданса пульсирующей круглой шайбы в экране. При больших значениях ka значения x_1 и y_1 приближаются к предельным.

$ka, кг/(м^2 \cdot с)$

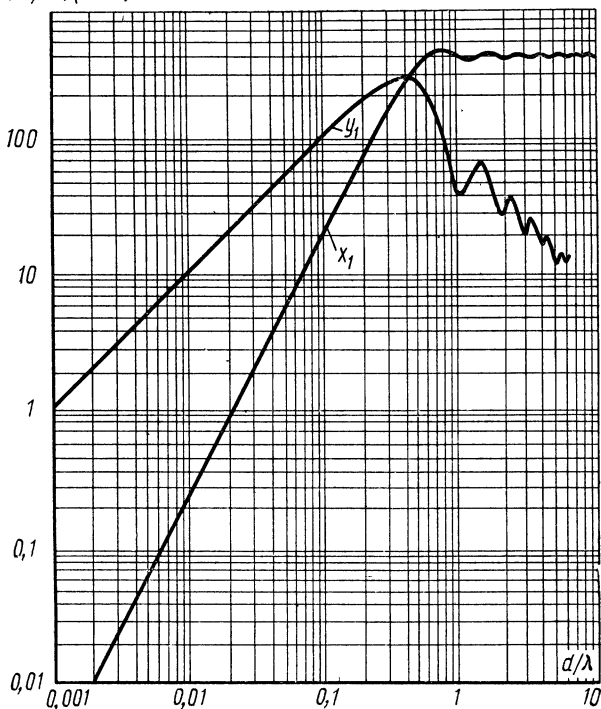


Рис. IV.3.2

Предельный коэффициент излучения рассмотренного источника

$$\eta = \frac{1}{1 + Y/(\pi X)} = \frac{1}{1 + (2ka) S_1/[\pi (2ka) - \mathcal{J}_1(2ka)]}.$$

При высоких частотах $\eta = 1$, а при частотах, когда $ka < 1$,

$$\eta \approx \frac{1}{1 + 0,08\lambda/a}.$$

Коэффициент осевой концентрации излучателя можно, вообще говоря, вычислить по формуле (IV.1.10). В этом случае задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{2\mathcal{J}_1^2 [(ka/2) \sin \theta]}{[(ka/2) \sin \theta]^2} \sin \theta d\theta. \quad (\text{IV.3.10})$$

Однако в данном случае удобнее воспользоваться тем обстоятельством, что активная часть импеданса уже известна, поэтому можно непосредственно найти среднее значение интенсивности, а затем воспользоваться определением коэффициента концентрации (1.2.24).

На основании (III.2.8) интенсивность равна

$$\mathcal{I}(0) = \frac{Q^2 \rho c}{2\lambda^2 r^2} \Phi^2(0) = \frac{Q^2 \rho c}{2\lambda^2 r^2}, \quad (\text{IV.3.11})$$

и акустическая мощность излучателя

$$P = \frac{1}{2} x v_n^2 = \frac{1}{2} \rho c x \frac{Q^2}{S}, \quad (\text{IV.3.12})$$

где x — приведенное значение реальной части импеданса.

Для круглого преобразователя x можно взять из (III.3.9) и подставить в (III.4.12):

$$P = \frac{1}{2} \rho c \left[1 - 2 \frac{\mathcal{J}_1(2ka)}{2ka} \right] \frac{Q^2}{\pi a^2}. \quad (\text{IV.3.13})$$

Подставляя $\mathcal{I}(0)$ и P в общую формулу коэффициента осевой концентрации, получаем

$$K = \left(\frac{\pi a}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{1 - 2\mathcal{J}_1(\pi D/\lambda)/(\pi D/\lambda)}, \quad (\text{IV.3.14})$$

где $d = 2a$ — диаметр поршневого излучателя.

Для числовых расчетов коэффициента концентрации энергии при различных d/λ удобно воспользоваться графиком, изображенным на рис. IV.3.1.

§ IV.4. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ КРУГЛОГО ПОРШНЕВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА ОСИ

Расчет звукового поля для любой точки пространства удастся провести приближенными методами с применением бесконечных рядов.

Выполним расчет поля круглого поршневого излучателя только в точках, лежащих на его оси. Как это будет видно, здесь можно использовать точные формулы.

Ось излучателя совместим с осью Z (рис. IV.4.1). Обозначив расстояние от центра O до элемента площадки $d\sigma$ через $OA = x$, а расстояние от точки A до точки наблюдения N — через r , запишем интеграл Рэлея для давления p_N в точке N на оси:

$$p_N = \frac{\omega \rho v_n}{2\pi} j \int_S \frac{e^{-jkr}}{r} d\sigma.$$