

Коэффициент осевой концентрации излучателя можно, вообще говоря, вычислить по формуле (IV.1.10). В этом случае задача сводится к вычислению интеграла

$$\int_0^{\pi} \frac{2\mathcal{J}_1^2[(ka/2) \sin \theta]}{[(ka/2) \sin \theta]^2} \sin \theta d\theta. \quad (\text{IV.3.10})$$

Однако в данном случае удобнее воспользоваться тем обстоятельством, что активная часть импеданса уже известна, поэтому можно непосредственно найти среднее значение интенсивности, а затем воспользоваться определением коэффициента концентрации (1.2.24).

На основании (III.2.8) интенсивность равна

$$\mathcal{I}(0) = \frac{Q^2 \rho c}{2\lambda^2 r^2} \Phi^2(0) = \frac{Q^2 \rho c}{2\lambda^2 r^2}, \quad (\text{IV.3.11})$$

и акустическая мощность излучателя

$$P = \frac{1}{2} x v_n^2 = \frac{1}{2} \rho c x \frac{Q^2}{S}, \quad (\text{IV.3.12})$$

где  $x$  — приведенное значение реальной части импеданса.

Для круглого преобразователя  $x$  можно взять из (III.3.9) и подставить в (III.4.12):

$$P = \frac{1}{2} \rho c \left[ 1 - 2 \frac{\mathcal{J}_1(2ka)}{2ka} \right] \frac{Q^2}{\pi a^2}. \quad (\text{IV.3.13})$$

Подставляя  $\mathcal{I}(0)$  и  $P$  в общую формулу коэффициента осевой концентрации, получаем

$$K = \left( \frac{\pi a}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{1 - 2\mathcal{J}_1(\pi D/\lambda)/(\pi D/\lambda)}, \quad (\text{IV.3.14})$$

где  $d = 2a$  — диаметр поршневого излучателя.

Для числовых расчетов коэффициента концентрации энергии при различных  $d/\lambda$  удобно воспользоваться графиком, изображенным на рис. IV.3.1.

#### § IV.4. ЗВУКОВОЕ ПОЛЕ КРУГЛОГО ПОРШНЕВОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ НА ОСИ

Расчет звукового поля для любой точки пространства удастся провести приближенными методами с применением бесконечных рядов.

Выполним расчет поля круглого поршневого излучателя только в точках, лежащих на его оси. Как это будет видно, здесь можно использовать точные формулы.

Ось излучателя совместим с осью  $Z$  (рис. IV.4.1). Обозначив расстояние от центра  $O$  до элемента площадки  $d\sigma$  через  $OA = x$ , а расстояние от точки  $A$  до точки наблюдения  $N$  — через  $r$ , запишем интеграл Рэлея для давления  $p_N$  в точке  $N$  на оси:

$$p_N = \frac{\omega \rho v_n}{2\pi} j \int_S \frac{e^{-jkr}}{r} d\sigma.$$

Примем площадь узкой кольцевой полосы, ограниченной окружностями с радиусами  $x$ ,  $x + dx$ , за элемент площади  $d\sigma$  и выразим расстояние  $r$  через радиус кольца  $x$  и расстояние до точки  $N$ . Тогда  $r = \sqrt{x^2 + z^2}$ . При этом давление на оси

$$p_N = j\omega\rho v \int_0^a \frac{e^{-jk\sqrt{x^2+z^2}}}{\sqrt{x^2+z^2}} x dx, \quad (\text{IV.4.1})$$

где  $a$  — радиус излучателя.

Введем новую переменную  $u = \sqrt{x^2 + z^2}$ :

$$p_N = j\omega\rho v_n \int_z^{\sqrt{a^2+z^2}} \frac{1}{u} e^{-jku} u du = \rho c v_n e^{-jkz} (1 - e^{-jk\sqrt{a^2+z^2}-z}). \quad (\text{IV.4.2})$$

Обозначив  $k(\sqrt{a^2+z^2}-z) = \alpha$  и воспользовавшись формулой

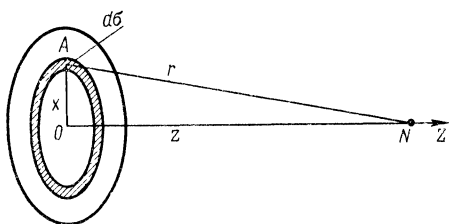


Рис. IV.4.1

Эйлера, после элементарных преобразований получим

$$1 - e^{-j\alpha} = 2j \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| e^{-j\varphi} \quad [\varphi = (\alpha - \pi)/2].$$

Тогда давление на оси

$$p(z) = 2\rho c v_n \left| \sin \frac{\alpha}{2} \right| e^{-j(kz - \varphi)}, \quad (\text{IV.4.3})$$

где

$$\alpha = 2\pi \frac{z}{\lambda} (\sqrt{1 + a^2/z^2} - 1), \quad (\text{IV.4.4})$$

$$\varphi = \frac{\alpha - \pi}{2} = \pi \frac{(2z/\lambda) (\sqrt{1 + a^2/z^2} - 1) - 1}{2}.$$

Как следует из (IV.4.3) и (IV.4.4), давление на оси выражается сложной функцией от расстояния  $z$ , отличающейся от той, которая описывает плоскую волну, тем, что ее амплитудное значение периодически меняется от 0 до  $2\rho c v_n$ , а начальная фаза  $\varphi$  зависит от  $z/\lambda$  и  $a/\lambda$ .

Введем обозначения:  $p' = p(z)/p_0$ ;  $z' = z/\lambda$ ;  $a' = a/\lambda$  и представим (IV.4.3) в форме безразмерной функции от безразмерных переменных:

$$p'(z') = \left| \sin \frac{\alpha(z', a')}{2} \right| e^{-2j\pi z'} e^{j[\alpha(z', a') - \pi]/2}. \quad (\text{IV.4.5})$$

Здесь

$$\alpha(z', a') = 2\pi z' (\sqrt{1 + (a'/z')^2} - 1); \quad (\text{IV.4.6})$$

$z'$  — координата точки  $N$  в длинах волн;  $a'$  — радиус излучателя в длинах волн.

Выражение (IV.4.5) можно рассматривать как функцию, описывающую квазиплоскую волну с амплитудой, изменяющейся в пределах от 0 до 1, и начальной фазой, изменяющейся в зависимости от координаты  $z'$  и параметра  $a'$ .

Экстремальные значения амплитуды соответствуют координатам  $z'$ , удовлетворяющим уравнениям

$$\left| \sin \frac{\alpha(z', a')}{2} \right| = 0, \quad \left| \sin \frac{\alpha(z', a')}{2} \right| = 1,$$

которые имеют решения общего вида

$$\alpha = 2\pi z' (\sqrt{1 + (a'/z')^2} - 1) = n\pi \quad (n = 0, 1, 2, 3, \dots). \quad (\text{IV.4.7})$$

Отсюда координаты точек (где  $p_N = 0$  или  $p_N = 1$ )

$$z'_n = \frac{(a')^2}{n} - \frac{n}{4}. \quad (\text{IV.4.8})$$

Четные целые значения  $n$  соответствуют точкам, где давление равно нулю, нечетные — точкам, где давление равно единице.

Наиболее удаленная точка, для которой  $p' = 0$ , имеет координату  $z' \rightarrow \infty$  ( $n = 0$ ). Наиболее удаленная точка, где звуковое давление имеет максимальное значение, расположена на расстоянии  $z'_n$  при  $n = 1$  ( $z'_1 = a'^2 - 1/4$ ). Если пользоваться обычными единицами длины, то расстояние до наиболее удаленной точки с максимумом амплитуды равно

$$z = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4}. \quad (\text{IV.4.9})$$

В геометрическом центре поверхности излучателя амплитуда давления может иметь значение, лежащее между 0 и 1; в размерных величинах — между 0 и  $2\rho v_n$ . Точное давление в центре при  $z' = 0$  определяется формулой (IV.4.5)

$$p'_0 = \left| \sin \frac{\alpha(0, a')}{2} \right| = |\sin \pi a'|.$$

При целом  $a' = a/\lambda$  амплитуда давления равна нулю; при  $a'$  полуцелом амплитуда  $|p'_0| = 1$ .

Рассмотрим значения фазы  $\varphi(z', a')$  в экстремальных точках (IV.4.8). Согласно (IV.4.4) и (IV.4.7),

$$\varphi_n = \frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{2} = \left( \frac{n}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{2}.$$

Для точек, где имеется максимум давления  $n$ , равно нечетному числу ( $n = 2m + 1$ ):

$$\varphi_{2m+1} = \left( \frac{2m+1}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{2} = (2m-1) \frac{\pi}{4} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е. фаза кратна нечетному числу  $\pi/4$ . Для точек, соответствующих нулевому давлению,  $n$  равно четному числу ( $n = 2m$ ):

$$\varphi_{2m} = \left( \frac{2m}{2} - 1 \right) \frac{\pi}{2} = 2(m-1) \frac{\pi}{4} \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

т. е. фаза кратна четному значению  $\pi/4$ .

На рис. IV.4.2 даны кривые изменения амплитуды приведенного давления  $p'$  на оси поршневого круглого излучателя для случаев

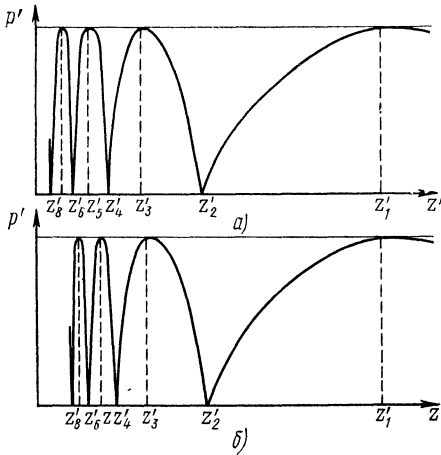


Рис. IV.4.2

$a' = 5$  (а) и  $a' = 10$  (б). Следовательно, вблизи излучателя волновой процесс очень сложен. В области от  $z'_0 = 0$  до  $z'_1 = a'^2 - 1/4$  амплитуда и начальная фаза изменяются в зависимости от расстояния  $z'$  и параметра  $a$ . В связи с этим эту область поля можно назвать ближним полем. Его протяженность равна  $z'_1 = a'^2 - 1/4$  или

$$z_1 = \frac{a^2}{\lambda} - \frac{\lambda}{4} \approx \frac{a^2}{\lambda}. \quad (\text{IV.4.10})$$

Для расстояний больших, чем  $z'_1$ , начинается область поля, когда амплитуда давления медленно убывает с расстоянием,

а фаза монотонно изменяется, стремясь к  $\pi/2$ . При этом

$$\sin \left[ \pi z' \left( \sqrt{1 + \left( \frac{a'}{z'} \right)^2} - 1 \right) \right] \approx \sin \{ \pi z' [1 + a'^2/2z'^2 - 1] \} = \sin \pi \frac{a'^2}{2z'}.$$

Иначе говоря, амплитуда уменьшается с расстоянием как  $\sin \left( \frac{\pi}{2} \frac{a'^2}{z'} \right)$ , а фаза — по закону

$$\frac{\pi a'^2/(2z') - \pi}{2} = \frac{\pi}{2} \left( \frac{a'^2}{2z'} - 1 \right).$$

С увеличением  $z'$  фаза приближается к своему постоянному значению —  $\pi/2$ . На некотором расстоянии  $z'$  от излучателя величина  $\pi a'^2/(2z')$  может оказаться настолько малой, что без существенной ошибки можно воспользоваться приближением  $\sin \beta \approx \beta$ . Закон изменения амплитуды принимает вид

$$\sin \left( \frac{\pi a'^2}{2z'} \right) \approx \frac{\pi}{2} \frac{a'^2}{z'}.$$

В данном случае фаза будет постоянной и равной —  $\pi/2$ . Начиная с этого расстояния, звуковое давление на оси излучателя изменяется по закону  $p'_N \approx \frac{\pi}{2} \frac{a'^2}{z'} e^{-j2\pi z'} e^{j\pi/2}$ , или

$$p_N = 2\pi r c v_n a^2 \frac{1}{2\lambda z} e^{jkz} e^{j\frac{\pi}{2}} = \rho c \frac{Q_n}{2\lambda z} e^{-jkz} e^{j\frac{\pi}{2}}, \quad (\text{IV.4.11})$$

где  $Q_n = \pi a^2 v$ , — объемная скорость, или производительность, источника.

Эту область называют *областью дальнего поля* или *волновой*.

Впервые в истории науки область ближнего поля изучена Френелем, а область дальнего поля — Фраунгофером. Поэтому ближнее поле иногда называют *областью Френеля*, а дальнее — *областью Фраунгофера*.

Следует заметить, что ближнее поле отделено от дальнего некоторой переходной областью, которая имеет протяженность от  $z'_1$  до  $z'_d$  (где  $z'_d$  — координата начала области дальнего поля). Величина  $z'_d$  условна и определяется степенью приближения, по которому можно принять  $\sin \beta \approx \beta$ . Для оценки этого приближения запишем  $\sin \beta$  в виде ряда

$$\sin \beta = \beta - \frac{\beta^3}{3!} + \frac{\beta^5}{5!}.$$

Ограничиваясь первым членом ряда, допускаем относительную ошибку в определении  $\sin \beta$ , равной отношению отброшенных членов ряда к  $\beta$ , т. е.  $\epsilon \approx \frac{d \sin \beta}{\sin \beta} \approx \frac{\beta^3}{6\beta} = \frac{\beta^2}{6}$ , или

$$\epsilon = \left( \frac{\pi a'^2}{2z'_d} \right)^2 \frac{1}{6}. \quad (\text{IV.4.12})$$

Решая (IV.4.12) относительно  $z'_d$ , находим приближительную длину  $z'_d$ :

$$z'_d \approx \frac{\pi a'^2}{2\sqrt{3\epsilon}}. \quad (\text{IV.4.13})$$

Например, для  $\epsilon = 0,01$

$$z'_d \approx \frac{\pi a'^2 10}{2 \cdot 1,7} \approx \frac{\pi d'^2}{0,8 \cdot 1,7}, \text{ или } z_d \approx 0,7 \frac{\pi d^2}{\lambda}$$

( $d$  — диаметр излучателя).

Таким образом, расстояние до начала области дальнего поля превышает длину ближней зоны в  $z'_d/z'_1$  раз:

$$\frac{z'_d}{z'_1} = \frac{\pi a'^2}{2\sqrt{3\epsilon}} \left( a'^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1} = \frac{\pi}{2\sqrt{3\epsilon}} \frac{1}{1 - 1/(4a'^2)}, \quad (\text{IV.4.14})$$

причем  $z'_d/z'_1$  слабо зависит от параметра  $a' > 1$ . В частности, при  $a' \gg 1$

$$\frac{z'_d}{z'_1} \approx \frac{\pi}{2\sqrt{3\epsilon}}.$$

Тогда

$$\frac{z'_d}{z'_1} \approx \frac{10\pi}{2\sqrt{3}} \approx 2,85\pi.$$

Между ближней и дальней областями поля, очевидно, существует переходная область, протяженность которой составляет

$$z'_d - z'_1 = \frac{\pi a'^2}{2\sqrt{3\epsilon}} - \left( a'^2 - \frac{1}{4} \right) = \left( \frac{\pi}{2\sqrt{3\epsilon}} - 1 \right) a'^2 + \frac{1}{4}. \quad (\text{IV.4.15})$$

На рис. IV.4.3 показана зависимость приведенного давления  $p$  на оси излучателя от расстояния  $s = z\lambda/a^2$ , где указана протяженность переходной зоны, когда  $a/\lambda = 5,8$ .

Если снимать диаграмму направленности без учета переходной области, то можно допустить значительную ошибку. Оценим ошибку, полагая, что дальняя зона непосредственно примыкает к ближней. Для этой оценки решим уравнение относительно  $\epsilon$ :

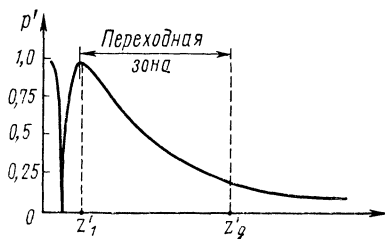


Рис. IV.4.3

$$\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3\epsilon}}\right) a'^2 + \frac{1}{4} = 0$$

и получим

$$\epsilon = \frac{4\pi^2 a'^4}{3(4a'^2 - 1)^2}.$$

При  $a' \gg 1$

$$\epsilon \approx \frac{\pi^2}{12} \approx 0,9,$$

т. е. относительная ошибка близка к единице.

## § IV.5. БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Вычисление амплитуды и фазы звукового давления, создаваемого плоским излучателем, представляет собой довольно сложную дифракционную задачу. Мы ознакомимся с решениями задачи для излучателя круглой формы, вставленного в бесконечный жесткий экран.

Как будет видно из дальнейшего изложения, решение задачи получается в виде бесконечных рядов, сходимость которых зависит от расстояния до излучателя. Для точек, расположенных вблизи излучателя, получаются слабо сходящиеся ряды. Для удаленных точек можно найти решение с помощью интегралов Френеля или рядов Ломмеля. Для очень удаленных точек пространства можно пользоваться асимптотическими приближениями. В соответствии с изложенным выше поле излучателя можно разделить на несколько областей: непосредственно примыкающую к поверхности излучателя, френелевой дифракции, переходную и дальнего поля.

**Область поля, примыкающая к излучателю.** Интеграл Рэлея (III.4.10) дает принципиальную возможность вычислить потенциал поля в любой точке полупространства. Однако выражения интеграла в виде аналитической функции не существует. Его представление в виде бесконечных рядов позволяет найти численные значения характеристик поля с какой угодно точностью.

В основу указанного представления положена теорема сложения для сферической функции Ханкеля нулевого порядка. Сущность этой теоремы состоит в следующем.

Если известны сферические координаты  $R$ ,  $\theta$  и  $\varphi$  двух точек пространства  $M_1(R_1, \theta_1, \varphi_1)$  и  $M_2(R_2, \theta_2, \varphi_2)$  (рис. IV.5.1, а), то расстояние между ними определяется из формулы

$$(M_1 M_2)^2 = d^2 = R_1^2 + R_2^2 - 2R_1 R_2 \cos \gamma, \quad (IV.5.1)$$

где  $\gamma$  — угол между  $OM_1$  и  $OM_2$ ;  $\cos \gamma = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$ .

Если известна сферическая функция Ханкеля нулевого порядка с аргументом  $\alpha d$  ( $d$  — расстояние между указанными точками), то