На рис. IV.4.3 показана зависимость приведенного давления p на оси излучателя от расстояния $s=z\lambda/a^2$, где указана протяженность переходной зоны, когда $a/\lambda=5{,}8$.

Если снимать диаграмму направленности без учета переходной области, то можно допустить значительную ошибку. Оценим ошибку, полагая, что дальняя зона непосредственно примыкает к ближней. Для этой оценки решим уравнение относительно ε:

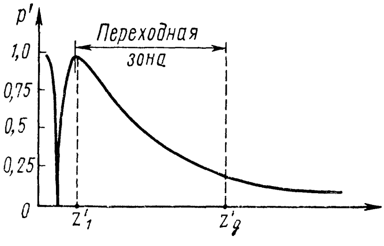

Рис. IV.4.3

$$\left(\frac{\pi}{2\sqrt{3\varepsilon}}\right) a'^2+\frac{1}{4}=0$$

и получим

$$\varepsilon=\frac{4\pi^2 a'^4}{3\,(4a'^2-1)^2}.$$

При $a'\gg 1$

$$\varepsilon\approx\frac{\pi^2}{12}\approx 0{,}9,$$

т. е. относительная ошибка близка к единице.

§ IV.5. БЛИЖНЕЕ ПОЛЕ ПЛОСКОГО ИЗЛУЧАТЕЛЯ

Вычисление амплитуды и фазы звукового давления, создаваемого плоским излучателем, представляет собой довольно сложную дифракционную задачу. Мы ознакомимся с решениями задачи для излучателя круглой формы, вставленного в бесконечный жесткий экран. Как будет видно из дальнейшего изложения, решение задачи получается в виде бесконечных рядов, сходимость которых зависит от расстояния до излучателя. Для точек, расположенных вблизи излучателя, получаются слабо сходящиеся ряды. Для удаленных точек можно найти решение с помощью интегралов Френеля или рядов Ломмеля. Для очень удаленных точек пространства можно пользоваться асимптотическими приближениями. В соответствии с изложенным выше поле излучателя можно разделить на несколько областей: непосредственно примыкающую к поверхности излучателя, френелевой дифракции, переходную и дальнего поля.

Область поля, примыкающая к излучателю. Интеграл Рэлея (III.4.10) дает принципиальную возможность вычислить потенциал поля в любой точке полупространства. Однако выражения интеграла в виде аналитической функции не существует. Его представление в виде бесконечных рядов позволяет найти численные значения характеристик поля с какой угодно точностью.

В основу указанного представления положена теорема сложения для сферической функции Ханкеля нулевого порядка. Сущность этой теоремы состоит в следующем.

Если известны сферические координаты R, θ и φ двух точек пространства $M_1(R_1, \theta_1, \varphi_1)$ и $M_2(R_2, \theta_2, \varphi_2)$ (рис. IV.5.1, a), то расстояние между ними определяется из формулы

$$(M_1M_2)^2=d^2=R_1^2+R_2^2-2R_1R_2\cos\gamma, \qquad \text{(IV.5.1)}$$

где γ — угол между OM_1 и OM_2; $\cos\gamma=\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\cos(\varphi_1—\varphi_2)$.

Если известна сферическая функция Ханкеля нулевого порядка с аргументом αd (d — расстояние между указанными точками), то возможно следующее представление этой функции в ряд по полиномам Лежандра [27]:

$$n_0(\alpha d)=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\begin{matrix} h_m(\alpha R_1)\,j_m(\alpha R_2) \\ h_m(\alpha R_2)\,j_m(\alpha R_1) \end{matrix}\,P_m(\cos\gamma), \qquad (\text{VI}.5.2)$$

где верхняя сумма относится к случаю $R_1>R_2$; нижняя — к случаю $R_1<R_2$.

Пусть точка P элемента dS площади излучателя имеет сферические координаты ρ, $\pi/2$, φ, а точка M, в которой необходимо найти

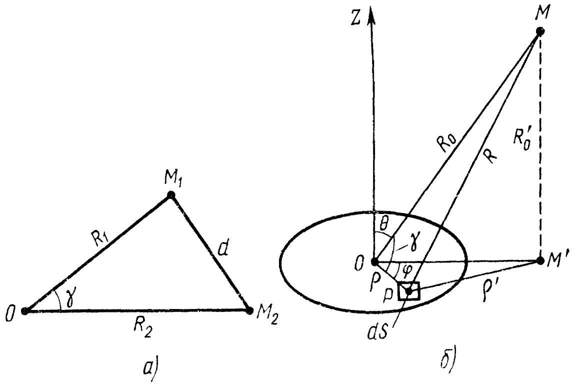

Рис. IV.5.1

звуковое давление, — координаты R_0, θ, 0 (рис. IV.5.1, *б*). В этом случае по формуле (IV.5.1) расстояние между этими точками

$$R^2=R_0^2+\rho^2-2R_0\rho\cos\gamma, \qquad (\text{IV}.5.3)$$

где $\cos\gamma=\sin\theta\cos\varphi$.

Если считать, что нормальная составляющая скорости по всей поверхности одинакова и равна v_0, то звуковое давление в точке M

$$p_M=j\omega\rho\Phi=j\frac{k^2\rho v_0 c}{2\pi}\int\limits_S\frac{e^{-jkR}}{kR}\,dS. \qquad (\text{IV}.5.4)$$

Как известно из теории бесселевых функций, выражение, стоящее под знаком интеграла (IV.5.4), есть не что иное, как сферическая функция Ханкеля нулевого порядка:

$$h_0(kR)=\frac{e^{jkR}}{kR}. \qquad (\text{IV}.5.5)$$

Учитывая сферические координаты концов отрезка R [см. (IV.5.2)], получаем

$$\frac{e^{-jkR}}{kR}=\sum_{m=0}^{\infty}(2m+1)\begin{matrix} h_m(kR_0)\,j_m(k\rho) \\ h_m(k\rho)\,j_m(kR_0) \end{matrix}\,P_m(\sin\theta\cos\varphi),$$

где верхняя строчка соответствует случаю $R_0>\rho$, а нижняя — случаю $R_0<\rho$.

Таким образом, формулу (IV.5.4) можно записать в виде

$$2\pi \frac{p_M}{j\omega\rho v_0 k} = \int\limits_S \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \frac{h_m(kR_0)\, j_m(k\rho)}{h_m(k\rho)\, j_m(kR_0)} P_m(\sin\theta\cos\varphi)\, dS. \qquad \text{(IV.5.6)}$$

Известно, что для равномерно сходящихся рядов операции интегрирования и суммирования можно менять местами. На основании этого интеграл (IV.5.6) представим в виде суммы интегралов следующего типа:

$$\begin{aligned} &(2m+1)\, h_m(kR_0) \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} j_m(k\rho)\, P_m(\sin\theta\cos\varphi)\, \rho^2\, d\rho\, d\varphi \Big|_{R_0 > \rho}, \\ &(2m+1)\, j_m(kR_0) \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{a} h_m(k\rho)\, P_m(\sin\theta\cos\varphi)\, \rho^2\, d\rho\, d\varphi \Big|_{R_0 < \rho}. \end{aligned} \qquad \text{(IV.5.7)}$$

Можно показать, что интегралы в (IV.5.7) от полиномов Лежандра нечетных порядков обращаются в нули, а для полиномов четного порядка приводится к виду $\int\limits_0^{2\pi} P_{2m}(\sin\theta\cos\varphi)\, d\varphi = 2\pi P_{2m}(\cos\theta)$. Что касается интегралов $\int\limits_0^{a} j_{2m}(k\rho)\, \rho^2\, d\rho$ и $\int\limits_0^{a} h_{2m}(k\rho)\, \rho^2\, d\rho$, то они могут быть вычислены с применением численных методов интегрирования. Таким образом, для каждой точки поля следует найти численные значения суммы:

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2\pi\,(4m+1)\, P_{2m}(0)\, P_{2m}(\cos\theta)\, \frac{U_{2m} h_{2m}(kR_0)}{V_{2m} j_{2m}(kR_0)}, \qquad \text{(IV.5.8)}$$

где

$$U_{2m} = \int\limits_0^{a} j_{2m}(k\rho)\, \rho^2\, d\rho, \quad V_{2m} = \int\limits_0^{a} h_{2m}(k\rho)\, \rho^2\, d\rho. \qquad \text{(IV.5.9)}$$

Штенцель [11], используя подобные ряды, получил таблицы и графики звукового давления вблизи поверхности плоского излучателя круглой формы. На рис. IV.5.2 приведены линии равного звукового давления в плоскости, параллельной плоскости излучателя. Здесь изображены линии равного давления. Цифры на графиках обозначают отношение давления p_M к давлению в плоской волне. Плоскость, к которой относят указанные кривые, находятся на небольшом расстоянии от излучателя. Характерно, что в различных точках плоскости, параллельной поверхности излучателя, давление и фаза не постоянны, как это было бы в идеальной плоской волне. Равные амплитуды давления расположены по замкнутым линиям. На одной и той же плоскости имеется несколько изобар.

Таким образом, вычисление амплитуды звукового давления по точным формулам дало следующий результат: вблизи поверхности круглого поршневого излучателя в экране излучатель создает сложное звуковое поле, значительно отличающееся от идеального плоского.

У реального поля вблизи излучателя фазовая поверхность имеет множество бугров и впадин. Сечение этой поверхности плоскостью дает на ней изобары в виде замкнутых кривых. На этой плоскости видны изобары, относящиеся к различным волновым поверхностям.

В изотропной среде поток звуковой энергии перпендикулярен поверхности волны, т. е. совпадает с направлением нормали к поверхности. В данном случае линии потока звуковой энергии изогнуты. Поток энергии обходит области, в которых звуковое давление равно нулю, и концентрируется там, где давление максимальное.

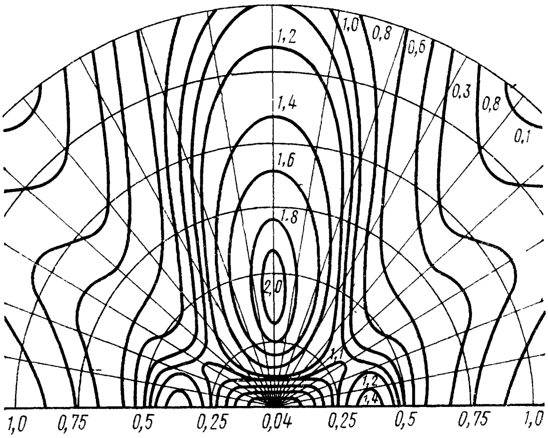

Рис. IV.5.2

Другой особенностью звукового поля вблизи плоского излучателя является постепенное сглаживание волновой поверхности по мере удаления от источника.

Область френелевой дифракции. Для точек поля, расположенных на значительных расстояниях по сравнению с размерами излучателя, можно найти более простые выражения, чем громоздкие ряды, рассмотренные ранее. Возможность упрощения расчетных формул связана с тем, что расстояние между точками M и P согласно (IV.5.3), записанное в виде

$$R = R_0\left[1 + \left(\frac{\rho}{R_0}\right)^2 - \frac{2\rho}{R_0}\cos\gamma\right]^{1/2}, \qquad (IV.5.10)$$

определяется выражением $(\rho/R_0)^2 - 2\rho\cos\gamma/R_0$, которое при $R_0 \to \infty$ стремится к нулю. Поэтому расстояние R представим в виде степенного ряда по возрастающим степеням малой величины $\left(\frac{\rho}{R_0}\right)^2 - \frac{2\rho}{R_0}\cos\gamma$:

$$R = R_0\left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{\rho^2}{R_0^2} - \frac{2\rho\cos\gamma}{R_0}\right) - \frac{1}{8}\left(\frac{\rho^2}{R_0^2} - \frac{2\rho\cos\gamma}{R_0}\right)^2 - \ldots\right]. \qquad (IV.5.11)$$

Область поля, для которой можно ограничиться в разложении (IV.5.11) приближением второго порядка, называют *областью френе-*

левой дифракции. Для нее ряд (IV.5.11) запишем в виде приближенной формулы

$$R = R_0 + \frac{\rho^2}{2R_0} - \left(\rho\cos\gamma + \frac{\rho^2}{2R_0}\cos^2\gamma\right). \qquad \text{(IV.5.12)}$$

Используя приближение второго порядка $kR \ll 1$, представим интеграл Рэлея в виде

$$p_M = \frac{j\rho c v_0}{\lambda}\int \frac{e^{-jkR}}{R}\,dS =$$
$$= j\,\frac{\rho c v_0}{\lambda}\,\frac{e^{-jkR_0}}{R_0}\int\limits_S e^{-jk\left[\frac{\rho^2}{2R_0} - \left(\rho\cos\gamma + \frac{\rho^2\cos^2\gamma}{2R_0}\right)\right]}\,dS. \qquad \text{(IV.5.13)}$$

В знаменателе выражения (IV.5.13) квадратичные члены опущены, так как они слабо влияют на амплитуду давления. Однако эти члены сохранены в фазовом множителе, поскольку небольшое изменение фазы вызывает заметное изменение звукового давления.

Для удобства вычисления интеграла по поверхности перейдем к цилиндрической системе и перенесем начало системы координат из центра излучателя в точку M', являющуюся проекцией точки M наблюдения на плоскость излучателя и экрана (см. рис. IV.5.1, *б*). В новой системе координат угол $\gamma = \pi/2$, а $R_0' = z_0$. Тогда (IV.5.13) запишем в форме, легко преобразуемой к интегралам Френеля и рядам Ломмеля [26]:

$$p_M = j\,\frac{\rho c v_0}{\lambda}\,\frac{e^{j(\omega t - kz_0)}}{z_0}\int e^{-jk\frac{\rho'^2}{2z_0}}\,dS. \qquad \text{(IV.5.14)}$$

В прямоугольной декартовой системе координат ($\rho'^2 = x^2 + y^2$) формулу (IV.5.14) можно преобразовать:

$$P_M = j\,\frac{\rho c v_0}{\lambda z_0}\,e^{j(\omega t - kz_0)}\int\limits_{x_1}^{x_2} e^{-jk\frac{x^2}{2z_0}}\,dx\int\limits_{y_1}^{y_2} e^{-jk\frac{y^2}{2z_0}}\,dy.$$

Произведем замену переменных: $k\frac{x^2}{2z_0} = \frac{\pi}{2}t^2$, $k\frac{y^2}{2z_0} = \frac{\pi}{2}s^2$, после чего получим выражение звукового давления через интегралы Френеля:

$$p_M = j\rho c v_0\,\frac{1}{2}\int\limits_{\sqrt{2/(\lambda z_0)}\,x_1}^{\sqrt{2/(\lambda z_0)}\,x_2} e^{-j\frac{\pi}{2}t^2}\,dt\int\limits_{\sqrt{2/(\lambda z_0)}\,y_1}^{\sqrt{2/(\lambda z_0)}\,y_2} e^{-j\frac{\pi}{2}S^2}\,dS. \qquad \text{(VI.5.15)}$$

Введем безразмерные расстояния $x' = x/\lambda$, $y = y/\lambda$ и представим (IV.5.15) в форме, удобной для практического использования:

$$p_M = \frac{j\rho_0 c v_0}{2}\int\limits_{\sqrt{2/z'}\,x_1'}^{\sqrt{2/z'}\,x_2'} e^{-j\frac{\pi}{2}t^2}\,dt\int\limits_{\sqrt{2/z'}\,y_1'}^{\sqrt{2/z'}\,y_2'} e^{-j\frac{\pi}{2}S^2}\,ds. \qquad \text{(IV.5.16)}$$

Интегралы Френеля приведены в форме таблиц в [6]. Кроме того, их можно с достаточной степенью точности находить графически, если имеется хорошо выполненная в крупном масштабе спираль Корню.

На рис. IV.5.3 она изображена в масштабе, позволяющем с небольшой точностью находить амплитуду звукового давления плоского излучателя в области френелевой дифракции. Спираль Корню изображает модуль и фазу интеграла Френеля в зависимости от параметра $\sqrt{2/(\lambda z_0)}\,x_1$. Используя этот график, можно проследить, как изменяется комплексная амплитуда давления поля прямоугольного излучателя в зависимости от расстояния z_0, координат x_1, x_2 и y_1, y_2 краев прямоугольного излучателя.

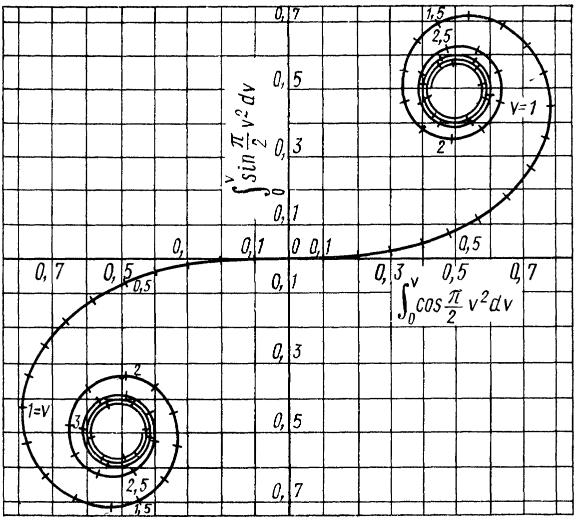

Рис. IV.5.3

Рассмотрим частный случай.

Пусть точка наблюдения лежит на оси прямоугольного излучателя. Стороны излучателя имеют размеры a и b. При этом комплексную амплитуду давления определяют формулой

$$p = j\,\frac{\rho c v_n}{2} \int\limits_{-\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}}^{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}} e^{-j\frac{\pi}{2}t^2}\,dt \int\limits_{-\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}}^{\frac{b}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}} e^{-j\frac{\pi}{2}s^2}\,ds\,.$$

Проследим за модулем амплитуды давления с изменением расстояния z_0 для квадратного излучателя $a=b$. Модуль давления в этом случае определяют квадратом отрезка линии на спирали Корню, проведенного между точками спирали:

$$s_1 = -\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}, \quad s_2 = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}.$$

Пусть $s_{1,2} = \mp\sqrt{\frac{2}{\lambda z_0}}\,\frac{a}{2} = \pm 2{,}5$ для некоторого значения. Тогда модуль давления

$$|p| = \frac{\rho c v_n}{2}\,(A^{+2,5}_{-2,5})^2.$$

По мере увеличения расстояния z_0 точки концов отрезка A будут скользить по спирали, пробегая значения параметров от $\pm 2{,}5$ до 0. Модуль давления сначала будет то увеличиваться, то уменьшаться, достигнув минимального значения при $s_{1,2} = \pm 1{,}9$, затем увеличиваться. Когда z_0 станет таким, что параметр $s_{1,2}$ примет значение $\approx \pm 1{,}4$, модуль A достигнет снова максимального значения. При дальнейшем увеличении расстояния модуль плавно уменьшается по мере того как концы отрезка проходят точки с параметрами спирали от 1,4 до 0.

Изменение модуля давления на оси квадратного поршневого излучателя в экране в зависимости от расстояния z показано на рис. IV.5.4. Осевое распределение модуля звукового давления квадратного поршневого излучателя при изменении расстояния по оси Z, как и для круглого излучателя, имеет характерные осцилляции. Однако они менее ярко выражены по сравнению с осцилляциями давления на оси круглого излучателя.

Расстояние до последнего максимума модуля давления определяется формулой $z_0 \approx a^2/\lambda$ (a — сторона квадрата излучателя).

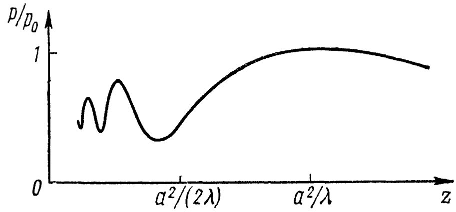

Рис. IV.5.4

Формула (IV.5.16) удобна при нахождении давления в области френелевой дифракции, когда излучатель имеет форму прямоугольника. Однако для круглых преобразователей она не применяется. В этом случае пользуются представлением интеграла Рэлея в виде степенных рядов. В частности, можно вывести следующее выражение:

$$P_M = -\rho c v_0 e^{j(\omega t - kz_0)} \left[e^{-\frac{j\pi(a^2+\delta^2)}{\lambda z_0}} (V_0 + jV_1) - 1 \right], \quad \text{(IV.5.17)}$$

где

$$V_0 = \mathscr{J}_0\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right) - \left(\frac{\delta}{a}\right)^2 \mathscr{J}_2\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right) + \left(\frac{\delta}{a}\right)^4 \mathscr{J}_4\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right) - \ldots;$$

$$V_1 = \frac{\delta}{a} \mathscr{J}_1\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right) - \left(\frac{\delta}{a}\right)^3 \mathscr{J}_3\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right) + \left(\frac{\delta}{a}\right)^5 \mathscr{J}_5\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right) - \ldots$$

Обозначая $m = \omega t - kz_0$, $\alpha = k(x^2 + \delta^2)/(2z_0)$, получаем

$$p_M = -\rho c v_0 e^{jm} [e^{-j\alpha} (V_0 + jV_1) - 1],$$

или, имея в виду только действительную часть комплексной функции,

$$p(z, \delta, t) = \rho c v_0 (X \cos m + Y \sin m) = \rho c v_0 \sqrt{X^2 + Y^2} \cos(m - \gamma), \quad \text{(IV.5.18)}$$

где

$$X = V_0 \cos\alpha + V_1 \sin\alpha - 1,$$

$$Y = V_0 \sin\alpha - V_1 \cos\alpha, \quad \gamma = \operatorname{arctg}\frac{X}{Y}. \quad \text{(IV.5.19)}$$

Нетрудно показать, что формула (IV.5.18) для оси излучателя $\delta = 0$ имеет вид

$$p(z_0, 0, t) = 2\rho c v_0 \sin\frac{\pi a^2}{2\lambda z_0} \cos\left(\omega t - kz_0 - \frac{\pi a^2}{\lambda z_0} - \frac{\pi}{2}\right). \quad \text{(IV.5.20)}$$

Как и в случае точного решения, амплитуда давления на оси осциллирует при удалении от излучателя. Координату наиболее удаленного максимума определяют по формуле

$$z = a^2/\lambda.$$

Доказательство этой формулы можно провести методом преобразований с учетом следующих выражений:

$$V_0\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right)\Big|_{\delta=0} = 1, \qquad V_1\left(\frac{2\pi a\delta}{\lambda z_0}\right)\Big|_{\delta=0} = 0,$$

$$\alpha = \frac{\pi\,(a^2+\delta^2)}{\lambda z_0}\Big|_{\delta=0} = \frac{\pi a^2}{\lambda z_0}.$$

Для описания характера изменения амплитуды и фазы давления в зависимости от z_0 достаточно найти экстремальные точки функции $\sqrt{X^2+Y^2}$, входящей в (IV.5.18). Проведем исследование этой функции. Поскольку выражения для X и Y в (IV.5.19) содержат осциллирующие ограниченные функции, то $\sqrt{X^2+Y^2}$ также ограничена и осциллирует между максимальными и минимальными значениями. В зависимости от расстояния δ до оси излучателя частота осцилляций и их глубина изменяются. При некотором значении $z_0 = z_{0д}$ функция $\sqrt{X^2+Y^2}$ имеет последний из возможных максимумов. Начиная с этого значения с увеличением z_0 амплитуда $\sqrt{X^2+Y^2}$ с ростом z_0 уменьшается по закону $1/z_0$.

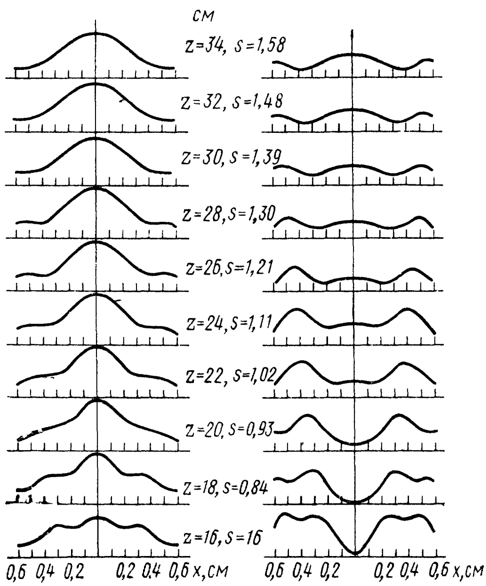

Рис. IV.5.5

На рис. IV.5.5 приведены графики зависимости амплитуды (слева) и фазы (справа) давления от отношения δ/a для различных безразмерных расстояний $s = z_0/(a^2/\lambda)$, обозначенных цифрами от 0,74* до 1,58. На графиках амплитуды отложены $\sqrt{X^2+Y^2}$ — безразмерные амплитуды звукового давления, а на графиках фазы — $\gamma/(2\pi) = (1/2\pi)\,\mathrm{arctg}\,\frac{X_i}{Y}$, или $\Delta z/\lambda$ (Δz_0 — отклонение фазовой поверхности от плоской).

При $s=1$ давление на оси максимально и уменьшается с увеличением s. На расстоянии $\delta = 0{,}3a$ при $s=1$ давление меньше, чем

* На рис. эта цифра по ошибке заменена на $s=16$.

при $s=0{,}78$, т. е. при $s=1$ амплитуда давления имеет слабо выраженный минимум. При других значениях параметра δ/a характерные максимумы и минимумы смещаются.

Фаза волны на всем интервале изменений s и δ/a изменяется незначительно. Наибольшее изменение фазы $\gamma/(2\pi)=0{,}2$. Это значит, что волновая поверхность отличается от плоской в пределах от 0 до 1 на $0{,}2\lambda$. Радиус излучателя в ультразвуковых установках равен нескольким десяткам длин волн, поэтому вблизи оси волну можно считать приблизительно плоской. Однако при точных исследованиях отклонение волновой поверхности от плоской необходимо учитывать.

Переходная область. Область поля вблизи излучателя, где зависимость амплитуды квазиплоской волны от расстояния z_0 определяется монотонной функцией, отличной от закона сферической волны $1/z_0$, условно можно назвать *переходной областью поля.* Для ее определения проведем исследование модуля давления на максимум и минимум.

Подставляя выражения X и Y, имеем

$$\sqrt{X^2+Y^2}=\sqrt{V_0^2+V_1^2+1-2\,(V_0\cos\alpha+V_1\sin\alpha)}=f\,(x).$$

Приравнивая к нулю производную по x от $f\,(x)$, получаем уравнение, корни которого являются точками максимума или минимума амплитуды давления.

Для проведения операции дифференцирования необходимо знать несколько свойств рядов V_0 и V_1.

1. Ряды V_0 и V_1 являются частными случаями общих рядов Ломмеля:

$$V_m=\left(\frac{x}{y}\right)^m \mathscr{J}_m\,(x)-\left(\frac{x}{y}\right)^{m+2}\mathscr{J}_{m+2}\,(x)+\ldots=\sum_{p=0}^{\infty}(-1)^p\left(\frac{x}{y}\right)^{m+2p}\mathscr{J}_{m+2p}\,(x),$$

где m — число, которое может быть положительным или отрицательным.

Ряд $V_m\,(x)$ сходится при любых x/y, поэтому его можно дифференцировать и интегрировать.

2. Производная по x от ряда Ломмеля равна

$$\frac{\partial V_m}{\partial x}=\frac{x}{y}\,V_{m-1}\,(x).$$

3. Производная n-го порядка от V_m

$$\frac{\partial^n V_m}{\partial x^n}=\frac{n-1}{y}\,\frac{\partial^{n-2}}{\partial x^{n-2}}\,V_{m-1}+\frac{x}{y}\,\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}\,V_{m-1}.$$

4. Производная от функции $\alpha\,(x)$

$$\frac{\partial\alpha}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{2y}+2y\right)=\frac{x}{y}.$$

После этих замечаний легко произвести преобразование первой производной от $\sqrt{X^2+Y^2}$:

$$\left(\sqrt{X^2+Y^2}\right)' = \left(\sqrt{V_0^2+V_1^2+1-2\,(V_0\cos\alpha+V_1\sin\alpha)}\right)' =$$
$$= \frac{V_0V_0'+V_1V_1'-V_0'\cos\alpha-V_0\alpha'\sin\alpha-V_1\sin\alpha-V_1\alpha'\cos\alpha}{\sqrt{V_0^2+V_1^2+1-2\,(V_0\cos\alpha+V_1\sin\alpha)}} =$$
$$= \frac{V_0V_0'+V_1V_1'-(V_0'+V_1\alpha')\cos\alpha-(V_1'-V_0\alpha')\sin\alpha}{\sqrt{V_0^2+V_1^2+1-2\,(V_0\cos\alpha+V_1\sin\alpha)}}.$$

Подставив в числитель первую производную ряда

$$V_0' = \frac{x}{y}\,V_{-1} = \frac{x}{y}\left[\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\mathscr{J}_{-1}(x)-\left(\frac{x}{y}\right)\mathscr{J}_1(x)+\dots\right] =$$
$$= \frac{x}{y}\left[-\left(\frac{x}{y}\right)^{-1}\mathscr{J}_1(x)-V_1(x)\right]-\left[\mathscr{J}_1(x)+\frac{x}{y}\,V_1(x)\right]$$

и первую производную ряда

$$V_1' = \frac{x}{y}\,V_0(x),$$

получим условие экстремума:

$$\frac{\partial}{\partial x}\sqrt{X^2+Y^2} = \frac{\mathscr{J}_1(x)\left[\cos\left(\frac{x^2}{2y}+2y\right)-V_0(x)\right]}{\sqrt{V_0^2+V_1^2+1-2\,(V_0\cos\alpha+V_1\sin\alpha)}} = 0.$$

Таким образом, экстремальные точки модуля давления являются корнями уравнений

$$\mathscr{J}_1(x)=0, \quad \cos\left(\frac{x^2}{2y}+2y\right)-V_0(x)=0,$$

или

$$\begin{aligned} &\mathscr{J}_1\left(\frac{ka\delta}{z_0}\right)=0,\\ &\cos\left[\frac{k\,(a^2+\delta^2)}{2z_0}\right]-V_0\left(\frac{ka\delta}{z_0}\right)=0. \end{aligned} \qquad \text{(IV.5.21)}$$

Начало переходной зоны определяется наименьшим из корней полученных уравнений, исключая нуль. В зависимости от соотношения между δ и a можно отметить три случая.

1. Если поле рассматривать на оси излучателя ($\delta=0$), то первое из уравнений (IV.5.21) обращается в тождество, а второе дает $\left|\cos\frac{ka^2}{2z_0}\right|=1$, наименьший корень которого, отличный от нуля, π. Таким образом, начало переходной зоны при $\delta=0$ определяется координатой оси $z_{0д}=a^2/\lambda$.

2. Если расстояние от оси равно радиусу излучателя ($\delta=a$), то первое уравнение (IV.5.21) имеет вид $\mathscr{J}_1\left(\frac{ka^2}{z_0}\right)=0$. Его первый корень $ka^2/z_{01}=3{,}832$, откуда $z_{011}=\frac{2\pi}{3{,}832}\,\frac{a^2}{\lambda}$. Второе из уравнений (IV.5.21) при $\delta=a$ содержит функцию $V_0(ka^2/z_0)$:

$$\cos\frac{ka^2}{z_0} = V_0\left(\frac{ka^2}{z_0}\right) = \mathscr{J}_0\left(\frac{ka^2}{z_0}\right)-\mathscr{J}_2\left(\frac{ka^2}{z_0}\right)+\mathscr{J}_4\left(\frac{ka^2}{z_0}\right).$$

Первый корень этого уравнения меньше, чем 3,83, и начало переходной зоны определяется этим корнем. Обозначим его A_1. Отсюда

$$\frac{ka^2}{z_0} = \frac{2\pi a^2}{\lambda z_0} = A_1, \quad z_0(a) = \frac{2\pi}{A_1}\frac{a^2}{\lambda},$$

причем $2\pi/A_1 > 1$, поэтому переходная область на линиях $\delta = a$ начинается дальше, чем осевая переходная область.

3. Можно показать, что при любом соотношении δ/a первый корень $\mathcal{J}_1(x)$ всегда больше первого корня уравнения $\cos\alpha(x) = V_0(x)$. Поэтому начало переходной области для $\delta/a \neq 0$ расположено дальше, чем начало переходной области на оси.

§ IV.6. ДИФРАКЦИОННЫЕ ПОПРАВКИ ПРИ ИЗМЕРЕНИИ СКОРОСТИ И ПОГЛОЩЕНИЯ ЗВУКА

Наиболее точные методы измерения скорости распространения и коэффициента поглощения звука в веществе основаны на предположении, что в экспериментальной установке создается плоская волна. Однако излучатели конечных размеров создают в ближней области плоское поле, искаженное дифракционными эффектами на краях излучателя даже в случае, если излучатель вставлен в бесконечный жесткий экран. Обычно в измерениях скорости распространения и коэффициента поглощения звука в веществе используют пьезоэлектрические пластины. В эхо-методах и в методе акустического интерферометра излучающая и приемная пластины могут быть совмещены.

Рассмотрим в общем виде возможные ошибки в определении скорости и поглощения звука, которые вносятся дифракционными искажениями плоской волны, действующей на пьезоэлектрический датчик давления.

В эхо-методах измерения скорости и поглощения звука отраженная от рефлектора волна, искаженная дифракционными явлениями на краях рефлектора и излучателя, возвращается к передающему кристаллу и возбуждает на его клеммах электрическое напряжение, пропорциональное среднему давлению на поверхности пьезоэлемента. Это давление отличается от давления $\bar{p}$, усредненного по поверхности перпендикулярной направлению распространения волны. Между этими величинами существует линейная зависимость

$$\langle p \rangle = D\bar{p},$$

где D — коэффициент дифракции, который определяется размерами и покрытием приемного преобразователя и практически не зависит от расстояния между излучателем и приемником звуковых волн.

Для неискаженного плоского поля величина $\bar{p}$, очевидно, выражается формулой идеальной плоской волны в среде с затуханием

$$\bar{p} = p_0 e^{-\alpha z} e^{j(\omega t - kz)},$$

где α — коэффициент поглощения волн. Для поля, искаженного дифракционными эффектами на краях излучающей и приемной пластин, выражение давления $\bar{p}$ можно получить путем усреднения по поверх-