

Полное поле должно удовлетворять волновому уравнению

$$\Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{V.1.1})$$

и одному из типов граничных условий на поверхности тела:

$$\Psi|_{r=r_0} = 0 \quad (\text{Д}), \quad \frac{\partial \Psi}{\partial n} \Big|_{r=r_0} = 0 \quad (\text{Н})$$

или

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n} = - \frac{\partial \Psi_0}{\partial n}, \quad \rho_1 \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial \Psi_0}{\partial t},$$

где Ψ и Ψ_0 — потенциалы поля во внешней среде и внутри тела.

Кроме того, рассеянное поле должно удовлетворять условиям излучения

$$r \left(\frac{\partial \Psi_s}{\partial n} + jk \Psi_s \right) \Big|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r}\right), \quad \Psi_s \Big|_{r \rightarrow \infty} = O\left(\frac{1}{r}\right).$$

§ V.2. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ЦИЛИНДРЕ БЕСКОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

Допустим, что на цилиндре бесконечной длины перпендикулярно оси падает плоская волна (рис. V.2.1). Выберем цилиндрическую систему координат с началом в точке O , лежащей на оси цилиндра. Тогда

$$\Psi_i = e^{j(\omega t - (kr))} = e^{j(\omega t - kr \cos \varphi)}, \quad (\text{V.2.1})$$

где \mathbf{k} — волновой вектор, φ — угол между \mathbf{k} и \mathbf{r} .

Потенциал скорости рассеянной волны представим в виде суперпозиции цилиндрических волн (II.1.10), исходящих из точек оси цилиндра:

$$\Psi_s = e^{j\omega t} \sum A_m \cos(m\varphi + \alpha_m) H_m^{(2)}(kr). \quad (\text{V.2.2})$$

Потенциал общего поля определяется суммой потенциалов полей (V.2.1) и (V.2.2):

$$\Psi = e^{j\omega t} [e^{-jkr \cos \varphi} + \sum A_m \cos(m\varphi + \alpha_m) H_m^{(2)}(kr)]. \quad (\text{V.2.3})$$

Постоянные A_m и α_m определяются на основании граничных условий; из двух ханкелевых функций в решении (V.2.3) выбрана вторая $H_m^{(2)}(kr)$, которая для выбранной временной зависимости потенциала удовлетворяет условиям излучения.

Рассмотрим рассеяние волны на жестком цилиндре, когда выполняется граничное условие (Н). Для того чтобы воспользоваться граничным условием и определить постоянные A_m и B_m , необходимо разложить функцию, соответствующую плоской волне, в ряд Фурье.

Известно, что это разложение имеет вид

$$e^{-jz \cos \varphi} = \mathcal{J}_0(z) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} j^m \mathcal{J}_m(z) \cos m\varphi = \sum \varepsilon_m j^{-m} \mathcal{J}_m(z) \cos m\varphi,$$

где $\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0; \\ 2 & \text{при } m=1, 2, 3, \dots \end{cases}$

Исходя из этого, потенциал поля (V.2.3) представится как

$$\Psi = e^{j\omega t} \sum \varepsilon_m \mathcal{J}_m(kr) \cos m\varphi j^{-m} + A_m H_m^{(2)}(kr) \cos(m\varphi + \alpha_m). \quad (\text{V.2.4})$$

Запишем также формулы для скорости v_r и давления p :

$$v_r = - \frac{\partial \Psi}{\partial r} =$$

$$= -k e^{j\omega t} [\sum \varepsilon_m j^{-m} \mathcal{J}'_m(kr) \cos m\varphi + A_m H_m^{(2)'}(kr) \cos(m\varphi + \alpha_m)]; \quad (\text{V.2.5})$$

$$p = \rho \frac{\partial \Psi}{\partial t} = j\omega \rho e^{j\omega t} \times$$

$$\times \left[\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^{-m} \mathcal{J}_m(kr) \cos m\varphi + A_m H_m^{(2)}(kr) \cos(m\varphi + \alpha_m) \right]. \quad (\text{V.2.6})$$

Если выполняются граничные условия типа (H), иначе говоря, если при $r=a$ радиальная скорость на поверхности обращается в нуль, то из (V.2.5) получаем тождество

$$\varepsilon_m j^{-m} \mathcal{J}'_m(ka) \cos m\varphi + A_m H_m^{(2)'}(ka) \cos(m\varphi + \alpha_m) \equiv 0.$$

Это тождество справедливо при

$$A_m = A'_m = - \varepsilon_m \frac{\mathcal{J}'_m(ka) j^{-m}}{H_m^{(2)'}(ka)}, \quad \alpha_m = 0. \quad (\text{V.2.7})$$

Если выполняется граничное условие типа (Д), то, приравнявая к нулю давление при $r=a$, получим из (V.2.6)

$$A_m = - \varepsilon_m j^{-m} \frac{\mathcal{J}_m(ka)}{H_m^{(2)}(ka)}, \quad \alpha_m = 0. \quad (\text{V.2.8})$$

Подставляя (V.2.7) в (V.2.4), получаем потенциал поля искаженной плоской волны для акустически жесткого цилиндра;

$$\Psi = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^{-m} \left[\mathcal{J}_m(kr) - \frac{\mathcal{J}'_m(ka) H_m^{(2)}(kr)}{H_m^{(2)'}(ka)} \right] \cos m\varphi; \quad (\text{V.2.9})$$

$$v_r = -k e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^{-m} \left[\mathcal{J}'_m(kr) - \frac{\mathcal{J}'_m(ka) H_m^{(2)'}(kr)}{H_m^{(2)}(ka)} \right] \cos m\varphi; \quad (\text{V.2.10})$$

$$p = j\omega \rho e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m j^{-m} \left[\mathcal{J}_m(kr) - \mathcal{J}_m(ka) \frac{H_m^{(2)}(kr)}{H_m^{(2)'}(ka)} \right] \cos m\varphi. \quad (\text{V.2.11})$$

Для акустически мягкого цилиндра формулы такие же, только вместо производных $\mathcal{J}'_m(ka)$ и $H_m^{(2)'}(ka)$ следует брать $\mathcal{J}_m(ka)$ и

$H_m^{(2)}(ka)$. Наконец, формулы поля рассеянной волны имеют вид:

$$\Psi_s = -e^{j\omega t} \sum \epsilon_m j^{-m} \mathcal{I}_m(ka) \frac{H_m^{(2)}(kr)}{H_m^{(2)'}(ka)} \cos m\varphi, \quad (\text{V.2.12})$$

$$v_{rs} = -ke^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m j^{-m} \mathcal{I}_m(ka) \frac{H_m^{(2)'}(kr)}{H_m^{(2)'}(ka)} \cos m\varphi, \quad (\text{V.2.13})$$

$$p_s = j\omega\rho e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m j^{-m} \mathcal{I}_m(ka) \frac{H_m^{(2)}(kr)}{H_m^{(2)'}(kr)} \cos m\varphi. \quad (\text{V.2.14})$$

Поскольку давление в плоской волне $p_i = \rho \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = j\omega\rho e^{j\omega t} e^{-jkr \cos \varphi}$, то множитель $j\omega\rho e^{j\omega t}$, входящий в (V.2.11) и (V.2.14), выразим через p_i :

$$j\omega\rho e^{j\omega t} = p_i e^{jkr \cos \varphi}.$$

Тогда

$$p = p_i e^{jkr \cos \varphi} \sum \epsilon_m j^{-m} [\mathcal{I}_m(kr) H_m'(ka) - \mathcal{I}_m'(ka) H_m(kr)] \frac{\cos m\varphi}{H_m'(ka)}, \quad (\text{V.2.15})$$

$$p_s = -p_i e^{jkr \cos \varphi} \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m j^{-m} \mathcal{I}_m'(ka) H_m(kr) \frac{\cos \varphi}{H_m'(ka)} = R p_i \sqrt{\frac{a}{r}}, \quad (\text{V.2.16})$$

где R — комплексный коэффициент отражения:

$$R = \sum_{m=0}^{\infty} -\epsilon_m j^{-m} \frac{\mathcal{I}_m'(ka)}{H_m'(ka)} H_m(kr) \cos m\varphi \sqrt{\frac{r}{a}} e^{jkr \cos \varphi}. \quad (\text{V.2.17})$$

Большой интерес в измерительной технике представляет расчет искажения волны, которое вносится жестким цилиндром. Судить о степени этого искажения можно, если вычислить отношение давления при наличии цилиндра к давлению в свободном поле. Давление возмущенной плоской волны представим как

$$p = p_i + p_s = p_i + p_i R \sqrt{\frac{a}{r}} = p_i \left(1 + R \sqrt{\frac{a}{r}} \right). \quad (\text{V.2.18})$$

Для $kr > 2$ воспользуемся асимптотическим представлением функции Ханкеля:

$$H_m(z) \approx j^m \sqrt{\frac{2}{\pi z}} e^{-j(z - \pi/4)}$$

и представим коэффициент отражения R в виде

$$\begin{aligned} R &\approx - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\mathcal{I}_m'(ka)}{H_m'(ka)} \cos m\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sqrt{\frac{r}{a}} e^{-j(kr - \pi/4) + jkr \cos \varphi} = \\ &= - \sum_{m=0}^{\infty} \epsilon_m \frac{\mathcal{I}_m'(ka)}{H_m'(ka)} \cos m\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} e^{-jkr(1 - \cos \varphi)} e^{j\pi/4} = \\ &= - Y_c(ka, \varphi) e^{-jkr(1 - \cos \varphi)}, \end{aligned}$$

где $Y_c(ka, \varphi)$ — фактор возмущения для цилиндра;

$$R_c - jI_c = Y_c(ka, \varphi) \approx \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \frac{\mathcal{J}'_m(ka)}{H'_m(ka)} \cos m\varphi \sqrt{\frac{2}{\pi ka}} e^{j\pi/4}.$$

С введением фактора возмущения отношение давлений возмущенного поля к свободному для $kr > 2$ имеет вид

$$\frac{p}{p_i} = 1 - e^{-jkr(1 - \cos \varphi)} \sqrt{\frac{a}{r}} Y_c(ka, \varphi), \quad (\text{V.2.19})$$

где $k = \omega/c$ — волновое число; r — расстояние от оси цилиндра до точки наблюдения; φ — угол, составленный между направлением распространения плоской волны и направлением от оси цилиндра до точки наблюдения; a — радиус цилиндра.

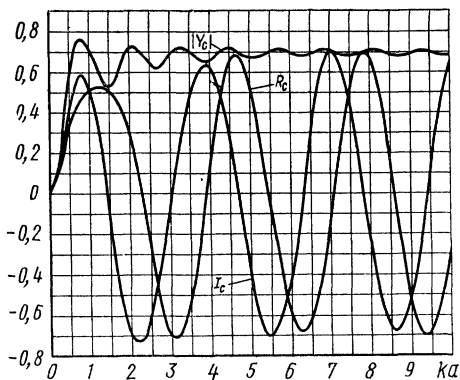


Рис. V.2.2

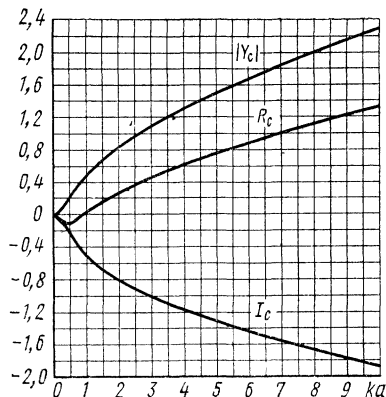


Рис. V.2.3

Минимальное искажение плоского поля при данном волновом факторе ka определяется формулой

$$\left| \frac{p}{p_i} \right|_{\min} = 1 - \sqrt{\frac{a}{r}} Y_c(ka, \varphi) \Big|_{\varphi=0}. \quad (\text{V.2.20})$$

На рис. V.2.2 и V.2.3 приведены графики модуля $|Y_c|$ вещественной R_c и мнимой I_c частей фактора искажения. Графики на рис. V.2.2 даны для точки A , а графики рис. V.2.3 — для точки B цилиндра (см. рис. V.2.1). Они показывают, что наибольшее искажение волны возникает со стороны затененной части.

Значение R , определенное из (V.2.17), зависит от расстояния от оси цилиндра до точки наблюдения. Для поверхности цилиндра R определяется соотношением

$$R_a = - \sum_0^{\infty} \varepsilon_m j^{-m} \frac{\mathcal{J}'_m(ka)}{H'_m(ka)} \cos m\varphi e^{jka \cos \varphi}. \quad (\text{V.2.21})$$

Используя (V.2.17) при $r = a$, находим отношение давления на поверхности цилиндра к давлению в свободном поле:

$$\frac{p_a}{p_i} = 1 + R_a \quad (\text{V.2.22})$$

и модуль этой величины:

$$\left| \frac{p_a}{p_i} \right| = |1 + R_a|. \quad (\text{V.2.23})$$

На рис. V.2.4 представлены полярные диаграммы $|p_a/p_i|$ в децибелах. Левая и правая стороны каждой диаграммы соответствуют

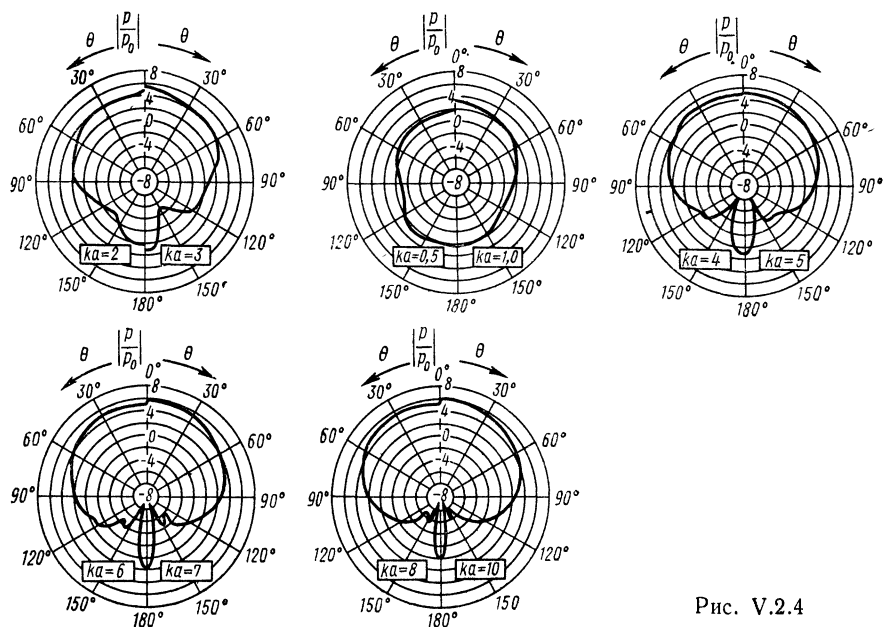


Рис. V.2.4

различным ka . Для каждого значения ka диаграмма должна быть продолжена симметрично прямой $0-180^\circ$. На диаграммах построены углы $\theta = \varphi + \pi$, т. е. углы между направлениями на источник плоской волны и точку наблюдения. При малых частотах давление практически не отличается от давления в свободном поле, но по мере увеличения частоты оно на поверхности цилиндра все больше и больше зависит от угла между направлениями на источник плоской волны и точкой наблюдения.

Полярные диаграммы при высоких частотах характеризуют почти равномерное давление в пределах освещенной части. В области геометрической тени возникают узкие участки минимума давления; при $\theta = 180^\circ$, т. е. по направлению распространения плоской волны, имеется острый пик, максимум которого соответствует давлению свободного поля.

Давление, измеряемое микрофоном, если его размеры сравнимы или больше длины волны, значительно отличается от давления в свободном поле и, как это видно из диаграммы (рис. V.2.4), зависит от угла φ . Это давление, усредненное на поверхности активной части микрофона, пропорционально давлению в свободном поле:

$$|\langle p_a \rangle| = D |p_i|, \quad (\text{V.2.24})$$

где $|\langle p_a \rangle|$ — амплитуда усредненного давления по поверхности микрофона; D — дифракционный коэффициент, зависящий от формы, размеров, конструкции микрофона и граничных условий; $|p_i|$ — амплитуда давления в свободном поле.

Для расчета величины D цилиндрического микрофона найдем давление, усредненное по поверхности цилиндра:

$$|\langle p \rangle| = \frac{1}{S} \int_S p_a(\varphi) dS, \quad (\text{V.2.25})$$

где $p_a(\varphi)$ — давление на поверхности.

Подставив в (V.2.11) $r = a$, получим

$$p_a = j\omega\rho e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} e_m j^{-m} [H'_m(ka) \mathcal{E}_m(ka) - \mathcal{E}'_m(ka) H_m(ka)] \frac{\cos m\varphi}{H'_m(ka)}.$$

Выражение, стоящее в квадратных скобках, есть определитель Вронского для уравнения Бесселя. В теории специальных функций доказывается, что в данном случае это выражение не равно нулю и для $ka \neq 0$ определяется формулой

$$\mathcal{E}_m(ka) H'_m(ka) - \mathcal{E}'_m(ka) H_m(ka) = \frac{2}{\pi ka},$$

откуда полное давление на поверхности цилиндра

$$p_a = j\omega\rho e^{j\omega t} \sum e_m j^{-m} \frac{2}{\pi ka} \frac{\cos m\varphi}{H'_m(ka)}. \quad (\text{V.2.26})$$

Подставляя p_a из (V.2.26) в (V.2.25) и учитывая, что

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq 0, \\ 2\pi & \text{при } m = 0, \end{cases}$$

получаем

$$\langle p_m \rangle = p_0 e^{j\omega t} \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{H'_0(ka)} = p_0 e^{j\omega t} \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{\mathcal{E}'_0(ka) - jN'_0(ka)}.$$

На основании соотношения для цилиндрических функций $\frac{d}{dx} Z(x) = -Z_1(x)$ имеем

$$\langle p \rangle = p_0 e^{j\omega t} \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{jN_1(ka) - \mathcal{E}_1(ka)}. \quad (\text{V.2.27})$$

Зная среднее значение полного давления на поверхности цилиндра, получаем дифракционный коэффициент

$$D = \frac{|\langle p_c \rangle|}{p_c} = \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{J}_1(ka)]^2 + [N_1(ka)]^2}}. \quad (\text{V.2.28})$$

Расчет чувствительности ленточного микрофона. На основании формулы общего давления на цилиндр можно ориентировочно рассчитать силу давления на чувствительный элемент ленточного микрофона. Ленточный микрофон представляет собой датчик скорости, состоящий из легкой ферромагнитной металлической ленты, способной перемещаться в поперечном магнитном поле. Под действием звуковой волны лента перемещается со скоростью

$$v = \frac{F_{0x} e^{j\omega t}}{K},$$

где F_{0x} — амплитуда силы звукового давления в направлении распространения волны; K — коэффициент, зависящий от конструкции микрофона.

Поскольку это движение осуществляется в поперечном магнитном поле, то на концах металлической ленты наводится электродвижущая сила индукции, пропорциональная силе бокового давления:

$$\mathcal{E} = Bvl = \frac{B}{K} F_{0x} l e^{j\omega t},$$

где B — индукция магнитного поля; l — длина ленты.

Чувствительность микрофона, т. е. отношение напряжения на выходе к давлению в свободном поле такого микрофона, пропорциональна силе звукового давления F_{0v} . При ориентировочной оценке

чувствительности ленточного микрофона от частоты можно рассчитать такую зависимость для цилиндра, диаметр которого равен ширине ленты микрофона. Нетрудно показать, что для цилиндра сила давления волны в направлении ее распространения равна

$$F_{0x} = 4p_0 a \frac{e^{j[\omega t + \gamma'_1(\omega a/c)]}}{(\omega a/c) c'_1(\omega a/c)},$$

где c'_1 — модуль; γ'_1 — фаза первой производной цилиндрической функции первого порядка.

Результат расчета отношения $F_{0x}/(4p_0 a)$ изображен на рис. V.2.5. Чувствительность ленточного микрофона при низких частотах увеличивается с частотой линейно и при $\omega = c/a$ ($\omega a/c = 1$) достигает максимума, а затем уменьшается.

§ V.3. ИНТЕНСИВНОСТЬ РАССЕЯННОЙ ВОЛНЫ НА ДАЛЕКИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ РАССЕИВАЮЩЕГО ЦИЛИНДРА

Используя асимптотические значения функций Ханкеля, получаем для потенциала скорости рассеянной волны:

$$\begin{aligned} \Psi_s &\approx e^{j\omega t} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum e_m j^{-m} \sin \delta'_m e^{j\delta_m - j(kr - \pi m/2 + \pi/4)} \cos m\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{j(\omega t - kr) + j\frac{\pi}{4}} \sum e_m e^{-j\pi m/2 + jm\pi/2} \sin \delta'_m j^{\delta_m} \cos m\varphi, \end{aligned}$$