

Зная среднее значение полного давления на поверхности цилиндра, получаем дифракционный коэффициент

$$D = \frac{|\langle p_c \rangle|}{p_c} = \frac{2}{\pi ka} \frac{1}{\sqrt{[\mathcal{J}_1(ka)]^2 + [N_1(ka)]^2}}. \quad (\text{V.2.28})$$

**Расчет чувствительности ленточного микрофона.** На основании формулы общего давления на цилиндр можно ориентировочно рассчитать силу давления на чувствительный элемент ленточного микрофона. Ленточный микрофон представляет собой датчик скорости, состоящий из легкой ферромагнитной металлической ленты, способной перемещаться в поперечном магнитном поле. Под действием звуковой волны лента перемещается со скоростью

$$v = \frac{F_{0x} e^{j\omega t}}{K},$$

где  $F_{0x}$  — амплитуда силы звукового давления в направлении распространения волны;  $K$  — коэффициент, зависящий от конструкции микрофона.

Поскольку это движение осуществляется в поперечном магнитном поле, то на концах металлической ленты наводится электродвижущая сила индукции, пропорциональная силе бокового давления:

$$\mathcal{E} = Bvl = \frac{B}{K} F_{0x} l e^{j\omega t},$$

где  $B$  — индукция магнитного поля;  $l$  — длина ленты.

*Чувствительность микрофона*, т. е. отношение напряжения на выходе к давлению в свободном поле такого микрофона, пропорциональна силе звукового давления  $F_{0v}$ . При ориентировочной оценке

чувствительности ленточного микрофона от частоты можно рассчитать такую зависимость для цилиндра, диаметр которого равен ширине ленты микрофона. Нетрудно показать, что для цилиндра сила давления волны в направлении ее распространения равна

$$F_{0x} = 4p_0 a \frac{e^{j[\omega t + \gamma'_1(\omega a/c)]}}{(\omega a/c) c'_1(\omega a/c)},$$

где  $c'_1$  — модуль;  $\gamma'_1$  — фаза первой производной цилиндрической функции первого порядка.

Результат расчета отношения  $F_{0x}/(4p_0 a)$  изображен на рис. V.2.5. Чувствительность ленточного микрофона при низких частотах увеличивается с частотой линейно и при  $\omega = c/a$  ( $\omega a/c = 1$ ) достигает максимума, а затем уменьшается.

### § V.3. ИНТЕНСИВНОСТЬ РАССЕЯННОЙ ВОЛНЫ НА ДАЛЕКИХ РАССТОЯНИЯХ ОТ РАССЕИВАЮЩЕГО ЦИЛИНДРА

Используя асимптотические значения функций Ханкеля, получаем для потенциала скорости рассеянной волны:

$$\begin{aligned} \Psi_s &\approx e^{j\omega t} \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} \sum e_m j^{-m} \sin \delta'_m e^{j\delta_m - j(kr - \pi m/2 + \pi/4)} \cos m\varphi = \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{j(\omega t - kr) + j\frac{\pi}{4}} \sum e_m e^{-j\pi m/2 + jm\pi/2} \sin \delta'_m j^{\delta_m} \cos m\varphi, \end{aligned}$$

или

$$\Psi_s = \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} e^{j(\omega t - kr)} e^{j\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin \delta'_m e^{j\delta'_m} \cos m\varphi.$$

Давление рассеянной волны

$$p_s = \rho \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = j\omega \rho \Psi_s; \quad (\text{V.3.1})$$

на больших расстояниях от цилиндра

$$p_s \underset{kr \gg 1}{=} \sqrt{\frac{2}{\pi rk}} \omega \rho e^{j\frac{3}{4}\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin \delta'_m e^{j\delta'_m} \cos m\varphi e^{j(\omega t - kr)}. \quad (\text{V.3.2})$$

Колебательная скорость частиц в радиальном направлении

$$v_s = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial r} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi kr}} k e^{j3\pi/4} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin \delta'_m e^{j\delta'_m} \cos m\varphi e^{j(\omega t - kr)}. \quad (\text{V.3.3})$$

Интенсивность рассеянной волны вычислим как  $\text{Re } p_s^* v_s / 2$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s &= \frac{1}{2} \text{Re } p_s^* v_s = \\ &= \frac{1}{2} \frac{2}{\pi kr} k \omega \rho \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta'_m \sin \delta'_n \text{Re } e^{j(\delta'_m - \delta'_n)} \cos m\varphi \cos n\varphi = \\ &= \frac{\omega \rho}{\pi r} \sum_m \sum_n \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta'_m \sin \delta'_n \cos(\delta'_m - \delta'_n) \cos m\varphi \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (\text{V.3.4})$$

Имея в виду, что интенсивность плоской волны, у которой амплитуда потенциала скорости равна единице,

$$\mathcal{I}_i = \frac{1}{2} \text{Re } p_i^* v_i = \frac{1}{2} \omega \rho k, \quad (\text{V.3.5})$$

выразим интенсивность рассеянной волны через интенсивность падающей:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s &= \frac{2\mathcal{I}_i}{\pi kr} \sum_{m,n} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta'_m \sin \delta'_n \cos(\delta'_m - \delta'_n) \cos m\varphi \cos n\varphi = \\ &= \frac{2\mathcal{I}_i}{\pi ka} \left(\frac{a}{r}\right) \sum_{m,n} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta'_m \sin \delta'_n \cos(\delta'_m - \delta'_n) \cos m\varphi \cos n\varphi, \end{aligned} \quad (\text{V.3.6})$$

где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 2 & \text{при } m \neq 0, \end{cases} \quad \varepsilon_n = \begin{cases} 1 & \text{при } n = 0, \\ 2 & \text{при } n \neq 0. \end{cases}$$

Отношение интенсивности рассеянной волны к интенсивности падающей является коэффициентом отражения по интенсивности и

выражается формулой

$$S(\varphi) = \frac{\mathcal{I}_s}{\mathcal{I}_i} = \left(\frac{a}{r}\right) \frac{2}{\pi k a} \sum_{m, n} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta'_m \sin \delta'_n \cos(\delta'_m - \delta'_n) \cos m\varphi \cos n\varphi. \quad (\text{V.3.7})$$

Удобной характеристикой описываемых процессов является полная рассеянная мощность. Для вычисления рассеянной мощности отрезком цилиндра  $h$  проинтегрируем функцию  $\mathcal{I}_s$  по площади цилиндра радиусом  $r$  и высотой  $h$ :

$$\mathcal{P}_s = \int_0^{2\pi} \mathcal{I}_s h r d\varphi = \frac{2\mathcal{I}_i}{\pi k r} h r \sum_{m, n} \varepsilon_m \varepsilon_n \sin \delta'_m \sin \delta'_n \cos(\delta'_m - \delta'_n) \times \\ \times \int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi.$$

Для вычисления интеграла воспользуемся условием ортогональности

$$\int_0^{2\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = 2 \int_0^{\pi} \cos m\varphi \cos n\varphi d\varphi = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n \neq 0, \\ 2\pi & \text{при } m = n = 0 \end{cases} \\ (m, n = 0, 1, 2, \dots).$$

На основании свойства ортогональности функции  $\cos m\varphi$  члены суммы с перекрестными индексами  $m$  и  $n$  исчезают. В результате получаем

$$\mathcal{P}_i = \frac{2\mathcal{I}_i}{\pi k r} h r (\varepsilon_0 \varepsilon_0 \sin^2 \delta'_0 2\pi + \varepsilon_1 \varepsilon_1 \sin^2 \delta'_1 \pi + \dots) = \\ = \frac{2\mathcal{I}_i h a}{k a} (2 \sin^2 \delta'_0 + 2 \cdot 2 \sin^2 \delta'_1 + \dots) = \frac{4\mathcal{I}_i h a}{k a} \sum_m \varepsilon_m (\sin \delta'_m)^2,$$

где

$$\varepsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 2 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Рассеянная мощность, приходящаяся на единицу длины цилиндра,

$$\mathcal{P}_i = \frac{4\mathcal{I}_i a}{k a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 \delta'_m. \quad (\text{V.3.8})$$

Отношение рассеянной мощности волны, приходящейся на единицу длины цилиндра, к интенсивности падающей волны имеет размерность длины и называется *эффективной шириной цилиндра*. Из (V.3.8) эта величина определяется формулой

$$Q = \frac{\mathcal{P}_i}{\mathcal{I}_i} = \frac{4a}{k a} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 [\delta'_m (ka)]. \quad (\text{V.3.9})$$

Если бы не было дифракционных явлений, то из плоской волны переизлучалась бы мощность, задержанная полоской, ширина которой равна удвоенному радиусу цилиндра. Однако в волновых процессах существенную роль играют процессы дифракции и интерференции волн. Поэтому эффективная ширина рассеяния зависит от  $ka$ , т. е. от отношения длины окружности поперечника сечения к длине волны. Эффективная ширина цилиндра может быть как больше, так и меньше геометрического поперечника. Для того чтобы в этом убедиться, вычислим эффективный поперечник рассеяния для длинных и коротких волн.

Для волн с большой длиной волны воспользуемся значениями функции  $\delta'(ka)$  при  $ka \ll 2m + 1$ :

$$\delta_0(ka) \underset{ka \ll 2m+1}{\approx} \frac{\pi}{4} k^2 a^2; \quad \delta'_m(ka) = -\frac{\pi m}{(m!)^2} \left(\frac{ka}{2}\right)^{2m}; \quad m = 1, 2, \dots$$

Отсюда

$$S(\varphi) \underset{ka \ll 1}{\approx} \frac{\pi a}{8r} (ka)^3 (1 - 2 \cos \varphi)^2, \quad (\text{V.3.10})$$

$$Q = \frac{4}{k} \sum \varepsilon_m \sin^2 \delta'_m = \frac{4}{k} (\sin^2 \delta'_0 + 2 \sin^2 \delta'_1 + 2 \sin^2 \delta'_2 + \dots) \approx \\ \approx \frac{4}{k} (\delta_0'^2 + 2\delta_1'^2 + 2\delta_2'^2) = \frac{4}{k} \left( \frac{\pi^2}{16} k^4 a^4 + \frac{2\pi^2 k^4 a^4}{16} \right) = \frac{4 \cdot 3}{16} k^3 a^4,$$

или

$$Q \approx \frac{3}{8} (ka)^3 2a \ll 2a. \quad (\text{V.3.11})$$

Согласно (V.3.10) и (V.3.11), при низких частотах относительная интенсивность зависит от угла  $\varphi$  по закону кардиоиды, а эффективная ширина рассеяния во много раз меньше диаметра цилиндра.

Для высоких частот воспользуемся асимптотическими представлениями. Тогда в качестве приближенного значения эффективной ширины цилиндра при  $ka \gg 1$  можно ограничить сумму (V.3.9) и учитывать только  $m = ka$  членов:

$$Q \approx \frac{4}{k} \sum_{m=0}^{ka} \varepsilon_m \sin^2 ka \approx \frac{4 \sin^2 ka}{k} \sum \varepsilon_m = \\ = \frac{4 \sin^2 ka}{k} (1 + 1 \cdot 2 + 1^2 2 + \dots + 1^{ka} 2) = \frac{4 \sin^2 ka}{k} (1 + 2ka), \\ Q \approx 2ka \frac{4 \cdot 1/2}{k} = 4a. \quad (\text{V.3.12})$$

Здесь при выводе принимаем значение  $\sin^2 ka \approx 1/2$  (среднее по периоду).

Представим ряд  $\sum \varepsilon_m \sin [\delta_m(ka)]$  в виде суммы трех рядов:

$$\sum_{m=0}^{ka-n} \varepsilon_m \sin^2 [\delta'_m(ka)] + \sum_{ka-n+1}^{ka+n} \varepsilon_m \sin^2 [\delta'_m(ka)] + \sum_{m=ka+n+1}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 [\delta'_m(ka)].$$

$(ka \gg n \gg 1)$

Очевидно, что каждый член первой суммы удовлетворяет условию  $m \ll ka$ , а члены третьей суммы соответствуют  $m \gg ka$ . Используя асимптотические значения функций  $\delta'_m(ka)$  для этих рядов, найдем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 \left[ ka - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right] + \sum_{m=ka-n+1}^{ka+n} \varepsilon_m \sin^2 [\delta'_m(ka)] + \\ + \sum_{m=ka+n+1}^{\infty} \varepsilon_m \sin^2 \left[ -\frac{m\pi}{(m!)^2} \left( \frac{ka}{2} \right)^{2m} \right].$$

Вследствие того что число слагаемых в первой сумме равно  $ka - n + 1$ , а во второй  $2n$  и не зависит от  $ka$ , вклад, вносимый в общую сумму вторым рядом, при  $ka \gg 1$  исчезающе мал; третья же сумма стремится к нулю, поскольку

$$\lim_{\substack{m > ka \\ ka \rightarrow \infty}} \frac{m\pi}{(m!)^2} \left( \frac{ka}{2} \right)^{2m} \rightarrow 0.$$

В результате получаем

$$\sum_{m=0}^{\infty} \approx \sum_{m=0}^{ka} \varepsilon_m \sin^2 \left[ ka - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right].$$

Наконец, заменяя квадраты синусов  $\sin^2 \left[ ka - \frac{\pi}{2} \left( m + \frac{1}{2} \right) \right]$  средними значениями по периоду, получим при  $ka \rightarrow \infty$

$$\sum_{m=0}^{\infty} \approx \sum_{m=0}^{ka} \varepsilon_m \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (1 \cdot 1^0 + 2 \cdot 1^1 + 2 \cdot 1^2 + \dots + 2 \cdot 1^{ka}) = \frac{1}{2} (1 + 2ka) \approx ka.$$

Отсюда эффективная ширина рассеяния плоской волны цилиндром при высоких частотах

$$Q = \frac{4}{k} \sum_{m=0}^{\infty} \approx 4a.$$

Таким образом, при высоких частотах эффективная ширина цилиндра равна удвоенной геометрической ширине. Такой результат несколько неожидан. В самом деле, если имеются волны с очень малой длиной волны, то можно не учитывать дифракцию плоской волны на краях цилиндра. В геометрическом приближении естественно ожидать, что часть волны шириной, равной диаметру, будет задержана цилиндром. Однако в случае коротких волн цилиндр значительно искажает плоскую волну: часть плоской волны идет на формирование области тени. Другая часть рассеивается по всем направлениям.

Физически образование тени можно объяснить тем, что часть рассеянной волны имеет резко выраженную направленность в область тени и там, интерферируя с падающей волной, образует тень. Эти две рассеянные волны отбирают от плоской волны часть мощности, соответствующей удвоенной геометрической ширине цилиндра. Подтверждение справедливости указанных выше рассуждений показано в [6], где получена формула коэффициента рассеяния по интенсив-

ности для предельно высоких частот:

$$S(\varphi) = \frac{a}{2r} \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) + \frac{1}{2\pi kr} \operatorname{ctg}^2\left(\frac{\varphi}{2}\right) \sin^2(ka \sin \varphi). \quad (\text{V.3.13})$$

Первый член формулы (V.3.13) представляет собой относительную интенсивность волны, отраженной от той части полуцилиндра, на которую падает плоская волна. Второй член имеет резко выраженный максимум в направлении  $\varphi=0$  и малую величину в других направлениях. Этот член выражает интенсивность тенеобразующей волны.

Кривые углового распределения относительной интенсивности рассеянной волны от жесткого цилиндра представлены на рис. V.3.1.

Для низких частот ( $ka \ll 1$ ) вся рассеянная волна отражается навстречу падающей, равномерно распределяясь по углам в пределах азимута:  $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ . Со стороны затененной части поверхности замечен небольшой максимум интенсивности. При увеличении частоты равномерное распределение интенсивности в сторону, противоположную направлению падающей волны, нарушается, а в направлении облучения выступает резко выраженный максимум интенсивности. По мере дальнейшего увеличения волнового фактора  $ka$  разделение рассеянной волны на отраженную и тенеобразующую выступает все резче и резче.

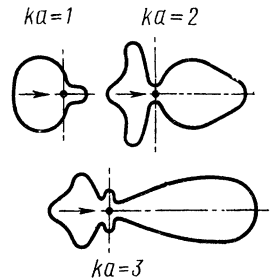


Рис. V.3.1

В пределе, когда  $ka$  стремится к очень большому числу, тенеобразующая волна имеет небольшой угол раскрытия, стремящийся к нулю.

Экспериментальная проверка теории возможна только для области пространства, лежащей вне геометрической тени. Для средних значений волнового фактора тенеобразующая часть рассеянной волны имеет достаточно широкую диаграмму направленности и еще можно произвести экстраполяцию результатов на области, где угол  $\varphi$  близок к нулю. Наоборот, при больших частотах такая экстраполяция невозможна. Поэтому измеренные значения эффективной ширины рассеяния  $Q$  как функции  $ka$  стремятся не к  $4a$ , на что указывает теория, а к  $2a$ , т. е. экспериментальное значение ширины рассеяния при предельно высоких частотах вдвое меньше, чем это следует из теории.

Если рассеяние осуществляется от мягкого цилиндра (см. § V.2), то на поверхности цилиндра исчезает давление и в формулах, характеризующих рассеянную волну, вместо функции  $\delta_m(ka)$  появятся функции  $\delta'_m(ka)$ . Это обстоятельство существенно изменит результат, особенно для низких частот. В выражениях (V.3.7) и (V.3.12) при  $ka \ll 1$  можно ограничиться только первыми членами суммы и получить для акустически мягкого цилиндра:

$$S(\varphi) \approx_{ka \ll 1} \frac{\pi}{2kr \ln^2 [1/(ka)]}, \quad (\text{V.3.14})$$

$$Q(\varphi) \approx_{ka \ll 1} \frac{\pi a^2}{ka \ln^2 [1/(ka)]}. \quad (\text{V.3.15})$$

Рассеянная волна в этом случае равномерно распределена по всем направлениям, а эффективная ширина рассеяния значительно больше геометрической ширины. Это явление связано с тем, что, как бы ни был мал радиус цилиндра по сравнению с длиной волны, диаметр области, где возникает существенное искажение плоского поля, имеет порядок длины волны.

#### § V.4. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРЕ

Внесем в однородную среду, где имеется плоская волна

$$\Psi_i = e^{j[\omega t - (kr)]}, \quad (V.4.1)$$

тело сферической формы и определим результирующее поле.

Ясно, что при наличии сферы уравнение плоской волны не может удовлетворять граничным условиям на поверхности сферы, а поэтому надо допустить, что с внесением сферической неоднородности обязательно появится вторичная волна, удовлетворяющая волновому уравнению. Причем полное поле, образованное из плоской и дополнительной волн, должно полностью отвечать граничным условиям.

В результате возмущающего действия сферы в среде будет существовать волна, состоящая из плоской и сферической:

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_s = e^{j\omega t} \left[ e^{-j(kr)} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)}(kr) P_m(\cos \theta) \right]. \quad (V.4.2)$$

Для того чтобы можно было при тех или иных граничных условиях найти коэффициенты  $A_m$ , необходимо разложить плоскую волну в ряд по полиномам Лежандра  $P_m(\cos \theta)$ . Будем отсчитывать полярный угол от положительного направления волнового вектора  $\mathbf{k}$ . Обозначим  $r$  расстояние от центра шара до точки наблюдения. Тогда  $(kr) = kr \cos \theta$  и функция потенциала скорости плоской волны имеет вид

$$\Psi_i = e^{-j(kr)} = e^{-jkr \cos \theta} = e^{-jz \cos \theta} \quad (z = kr).$$

Разложение плоской волны в ряд по функциям  $P_m(\cos \theta)$  представляют формулой

$$e^{-jz \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} j_m(z) P_m(\cos \theta), \quad (V.4.3)$$

где  $j_m(z)$  — сферическая функция Бесселя  $m$ -го порядка.

Таким образом, потенциал скорости поля  $\Psi_i = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \times j^{-m} j_m(z) P_m(\cos \theta)$ , искаженного плоской волной, представляется формулой

$$\Psi = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} [(2m+1) j^{-m} j_m(kr) + A_m h_m^{(2)}(kr)] P_m(\cos \theta). \quad (V.4.4)$$