

Рассеянная волна в этом случае равномерно распределена по всем направлениям, а эффективная ширина рассеяния значительно больше геометрической ширины. Это явление связано с тем, что, как бы ни был мал радиус цилиндра по сравнению с длиной волны, диаметр области, где возникает существенное искажение плоского поля, имеет порядок длины волны.

§ V.4. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА СФЕРЕ

Внесем в однородную среду, где имеется плоская волна

$$\Psi_i = e^{j[\omega t - (kr)]}, \quad (V.4.1)$$

тело сферической формы и определим результирующее поле.

Ясно, что при наличии сферы уравнение плоской волны не может удовлетворять граничным условиям на поверхности сферы, а поэтому надо допустить, что с внесением сферической неоднородности обязательно появится вторичная волна, удовлетворяющая волновому уравнению. Причем полное поле, образованное из плоской и дополнительной волн, должно полностью отвечать граничным условиям.

В результате возмущающего действия сферы в среде будет существовать волна, состоящая из плоской и сферической:

$$\Psi = \Psi_i + \Psi_s = e^{j\omega t} \left[e^{-j(kr)} + \sum_{m=0}^{\infty} A_m h_m^{(2)}(kr) P_m(\cos \theta) \right]. \quad (V.4.2)$$

Для того чтобы можно было при тех или иных граничных условиях найти коэффициенты A_m , необходимо разложить плоскую волну в ряд по полиномам Лежандра $P_m(\cos \theta)$. Будем отсчитывать полярный угол от положительного направления волнового вектора \mathbf{k} . Обозначим r расстояние от центра шара до точки наблюдения. Тогда $(kr) = kr \cos \theta$ и функция потенциала скорости плоской волны имеет вид

$$\Psi_i = e^{-j(kr)} = e^{-jkr \cos \theta} = e^{-jz \cos \theta} \quad (z = kr).$$

Разложение плоской волны в ряд по функциям $P_m(\cos \theta)$ представляют формулой

$$e^{-jz \cos \theta} = \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} j_m(z) P_m(\cos \theta), \quad (V.4.3)$$

где $j_m(z)$ — сферическая функция Бесселя m -го порядка.

Таким образом, потенциал скорости поля $\Psi_i = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \times j^{-m} j_m(z) P_m(\cos \theta)$, искаженного плоской волной, представляется формулой

$$\Psi = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} [(2m+1) j^{-m} j_m(kr) + A_m h_m^{(2)}(kr)] P_m(\cos \theta). \quad (V.4.4)$$

Коэффициенты A_m в решении (V.4.4) определяют с помощью граничных условий.

Допустим, что выполняется условие Дирихле, т. е. $\Psi(r, \theta)|_{r=a} = 0$. Тогда

$$j^{-m} (2m + 1) j_m(ka) = -A_m h_m^{(2)}(ka), \quad (\text{V.4.5})$$

откуда

$$A_m = - (2m + 1) j^{-m} \frac{j_m(ka)}{h_m^{(2)}(ka)}. \quad (\text{V.4.6})$$

Если выполняется условие Неймана ($\partial\Psi/\partial r|_{r=a} = 0$), то путем тех же рассуждений легко прийти к уравнениям, аналогичным (V.4.5), с тем лишь отличием, что вместо значений функции $j_m(z)$ и $h_m^{(2)}(z)$ появятся значения их первых производных при $z = ka$. Соответственно изменятся и коэффициенты A_m . Обозначим их A'_m и определим формулой

$$A'_m = - (2m + 1) j^{-m} \frac{j'_m(ka)}{h_m^{(2)'}(ka)}. \quad (\text{V.4.7})$$

В результате подстановки в (V.4.4) выражений (V.4.6) и (V.4.7) получим для мягкой и жесткой сфер:

$$\Psi_{\text{м}} = e^{j\omega t} \sum (2m + 1) j^{-m} P_m(\theta) \left[j_m(kr) - \frac{j_m(ka)}{h_m(ka)} h_m(kr) \right], \quad (\text{V.4.8})$$

$$\Psi_{\text{ж}} = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) j^{-m} P_m(\theta) \left[j_m(kr) - \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)} h_m(kr) \right]. \quad (\text{V.4.9})$$

Используя эти формулы, можно решить различные задачи, связанные с рассеянием звука на сфере. Полезно также использовать и другую формулу потенциала полного поля, в которой падающая волна отделена от рассеянной:

$$\Psi_{\text{м}} = e^{j(\omega t - kr \cos \theta)} \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) j^{-m} \frac{j_m(ka)}{h_m(ka)} h_m(kr) P_m(\theta) e^{jkr \cos \theta} \right], \quad (\text{V.4.10})$$

$$\Psi_{\text{ж}} = e^{j(\omega t - kr \cos \theta)} \times \left[1 - \sum_{m=0}^{\infty} (2m + 1) j^{-m} \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)} h_m(kr) P_m(\theta) e^{jkr \cos \theta} \right]. \quad (\text{V.4.11})$$

Давление на поверхности жесткой сферы. Формулу для давления на поверхности жесткой сферы получим, если воспользуемся известным соотношением

$$p = j\omega\rho\Psi = p_0\Psi,$$

где $p_0 = j\omega\rho$ — амплитуда давления плоской волны.

Подставим в выражение (V.4.9) $r = a$:

$$p_a = p_0\Psi_{\text{ж}}|_{r=a} = p_0 e^{j\omega t} \sum (2m + 1) j^{-m} \frac{1}{h'_m(ka)} \times [j_m(ka) h'_m(ka) - j'_m(ka) h_m(ka)] P_m(\theta) \quad (\text{V.4.12})$$

(p с индексом a обозначает давление при $r = a$, т. е. на поверхности сферы).

Величины, заключенные в квадратные скобки, представляют собой определители Вронского, составленные из линейно независимых решений уравнений Бесселя порядка $m+1/2$, поэтому все они отличаются от нуля и выражаются формулой

$$j_m(ka) h'_m(ka) - j'_m(ka) h_m(ka) = \frac{1}{(ka)^2}. \quad (\text{V.4.13})$$

Учитывая (V.4.13), найдем формулу давления на поверхности жесткой сферы:

$$p_a = p_0 e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} j^{-m} \frac{2m+1}{(ka)^2} \frac{P_m(\theta)}{h'_m(ka)} = \frac{p_0 e^{j\omega t}}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} \frac{P_m(\cos \theta)}{h'_m(ka)}, \quad (\text{V.4.14})$$

или

$$p_a = \frac{|p_0|}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} \frac{P_m(\cos \theta)}{D'_m(ka)} e^{j\delta'_m(ka)}, \quad (\text{V.4.15})$$

где D'_m и δ'_m — модуль и фаза первой производной сферической функции Ханкеля m -го порядка.

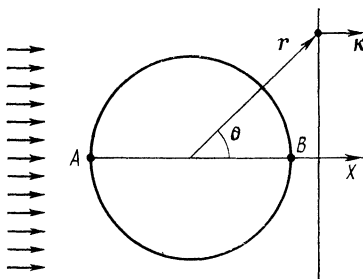


Рис. V.4.1

Используя предельные значения D'_m и δ'_m , получаем для низких частот

$$p = |p_0| e^{j\omega t} \left[\frac{e^{j\delta_0(ka)}}{D'_0(ka)} + \frac{1}{j} \frac{3 \cos \theta}{D'_1(ka)} e^{j\delta'_1(ka)} + \dots \right] \approx \underset{ka \ll 1}{\approx} |p_0| e^{j\omega t} \left(1 - j \frac{3}{2} ka \cos \theta \right). \quad (\text{V.4.16})$$

Формула (V.4.16) позволяет оценить разность давлений, оказываемых на уши со стороны низкочастотного звукового поля. В качестве примера определим отношение давлений звуковой волны на уши, если волна падает сбоку. Радиус головы 8 см, частота 1000 Гц. Найдем разность фаз давлений в точках со стороны освещенной ($\theta = \pi$) и затененной ($\theta = 0$) частей.

Согласно (V.4.16),

$$p \approx |p_0| e^{j\omega t} \left(1 - j \frac{3}{2} ka \cos \theta \right) \approx |p_0| \sqrt{1 + \frac{9}{4} \cos^2 \theta (ka)^2} e^{j(\omega t - \alpha)}$$

при $\alpha = -\arctg(3/2)(ka \cos \theta)$.

Отсюда давление в точке A (рис. V.4.1) равно

$$p(\pi) = |p_0| e^{j\omega t} \sqrt{1 + \frac{9}{4} k^2 a^2} e^{j \arctg(3/2)ka},$$

а в точке B

$$p(0) = |p_0| e^{j\omega t} \sqrt{1 + \frac{9}{4} k^2 a^2} e^{-j \arctg(3/2)ka}.$$

Отношение амплитуд $p(\pi)/p(0) = 1$, а разность фаз составляет заметную величину

$$\alpha_A - \alpha_B = 2 \arctg\left(\frac{3}{2} ka\right) = 2 \arctg \frac{3 \cdot 8 \cdot 3,3 \cdot 10^4}{10^4} \approx 3,6 \text{ рад.}$$

На рис. V.4.2 представлены полярные диаграммы модуля отношения давления на поверхности сферы к амплитуде давления в свободном поле для различных значений ka . Как видно из графиков,

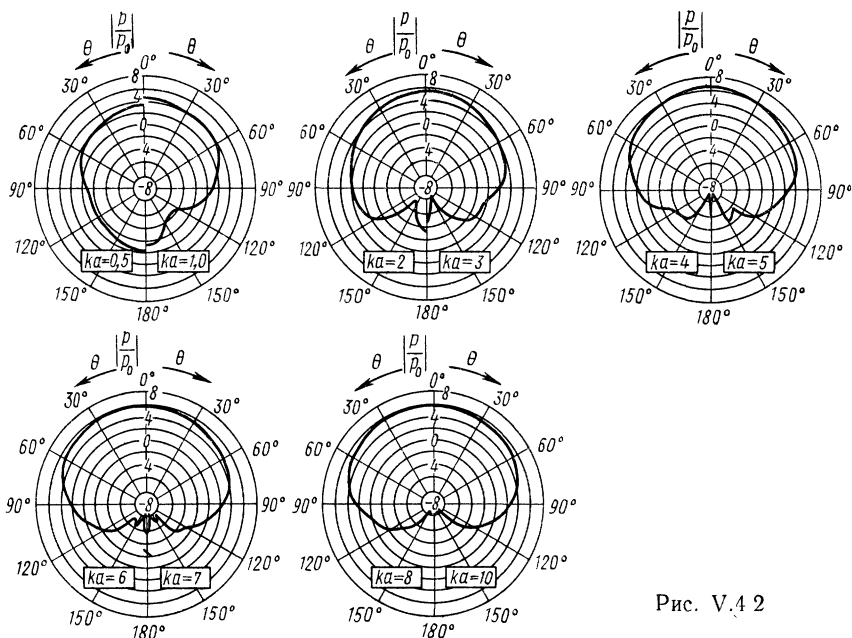


Рис. V.4.2

по мере увеличения ka максимум давления, расположенный в области освещенной части сферы ($\theta = \pi$), увеличивается. Например, для $ka = 10$ давление в передней части сферы на 6 дБ выше уровня давления свободного поля, а давление в затененной части на 8 дБ ниже.

Дифракционная поправка к сферическому микрофону. Если размеры корпуса микрофона сравнимы или больше длины падающей волны, то возникает искажение свободного поля и давление, измеренное с помощью микрофона, может значительно отличаться от давления падающей волны. Микрофон регистрирует среднее давление на поверхности. Амплитуда среднего давления пропорциональна амплитуде свободного поля. Отношение амплитуды среднего давления на поверхности микрофона к амплитуде свободного поля называют *дифракционным коэффициентом*. Для его вычисления в сферическом микрофоне, имеющем диафрагму с угловым размером $\pi - \theta$ (рис. V.4.3), найдем среднее давление полного поля на участке сферы, занимаемом входным отверстием микрофона.

Как известно, площадь поверхности сферического сегмента

$$S = 2\pi a^2 (1 - \cos \theta_0),$$

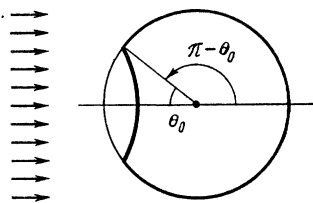


Рис. V.4.3

поэтому среднее давление по поверхности этого сегмента есть

$$\langle p \rangle = \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \int_{\pi - \theta_0}^{\pi} p_a \sin \theta \, d\theta = \frac{|p_0| e^{j\omega t}}{k^2 a^2} \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \times \\ \times \sum \frac{e^{j\delta'_m(ka)}}{j^m D'_m(ka)} \int_{\pi - \theta_0}^{\pi} (2m + 1) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta. \quad (\text{V.4.17})$$

Согласно соотношению для полиномов Лежандра

$$(2m + 1) P_m(x) = \frac{d}{dx} [P_{m-1}(x) - P_{m+1}(x)]$$

интеграл, входящий в (V.4.17), равен $P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)$, если $m > 0$, и $1 - \cos \theta_0$, если $m = 0$. Поэтому среднее давление поля

$$\langle p \rangle = \frac{|p_0| e^{j\omega t}}{k^2 a^2} \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \left[\frac{e^{j\delta'_0(ka)}}{D'_0(ka)} (1 - \cos \theta_0) + \right. \\ \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{j\delta'_m(ka)}}{j^m D'_m(ka)} [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)] \right]. \quad (\text{V.4.18})$$

При низких частотах ($ka \ll 1$) вместо $e^{j\delta'_m(ka)}$ можно ограничиться двумя слагаемыми разложения этой функции по степеням δ'_m , т. е. $e^{j\delta'_m} \approx 1 + j\delta'_m$. Используя асимптотические значения $\delta'_m(ka)$ и $D'_m(ka)$, получаем

$$\langle p \rangle \approx_{ka \ll 1} e^{j\omega t} |p_0| \left[1 - \frac{3}{4} jka (1 - \cos \theta_0) \right]. \quad (\text{V.4.19})$$

Таким образом, дифракционный коэффициент для сферического микрофона с углом раскрытия θ_0 выражается формулой

$$D \approx \frac{1}{k^2 a^2} \frac{1}{1 - \cos \theta_0} \left[\frac{e^{j\delta'_0(ka)}}{D'_0(ka)} (1 - \cos \theta_0) + \right. \\ \left. + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{j\delta'_m(ka)}}{j^m D'_m(ka)} [P_{m-1}(\cos \theta_0) - P_{m+1}(\cos \theta_0)] \right].$$

В частности, для низких частот

$$D \approx \sqrt{1 + \frac{9}{16} k^2 a^2 (1 - \cos \theta_0)^2}. \quad (\text{V.4.20})$$

Для сферического жесткого микрофона поверхность не ограничивается площадью диаграммы, а составляет поверхность полной сферы. При выводе формулы среднего давления необходимо расширить пределы интегрирования и вычислить интеграл формулы (V.4.17) в пределах от 0 до π . В связи с этим необходимо

вычислить $\int_0^{\pi} (2m + 1) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta$. На основании свойства ортогональности полиномов Лежандра (см. приложение I) получаем

$$\int_0^{\pi} (2m + 1) P_m(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \\ = (2m + 1) \int_0^{\pi} P_m(\cos \theta) P_n(\cos \theta) \sin \theta \, d\theta = \begin{cases} 1 & \text{при } m = 0, \\ 0 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Среднее давление на всю поверхность сферы равно

$$\langle p_a \rangle = \frac{|p_0|}{k^2 a^2} \frac{e^{j\delta'_0(ka) + j\omega t}}{D'_0(ka)}.$$

Если воспользоваться формулой $D'_0(z) = \frac{\sqrt{1+z^2}}{z^2}$, то получим

$$\langle p \rangle = \frac{|p_0|}{k^2 a^2} \frac{e^{j[\omega t + \delta'_0(ka)]}}{\sqrt{1+k^2 a^2}} k^2 a^2 = \frac{|p_0|}{\sqrt{1+k^2 a^2}} e^{j(\omega t + \delta'_0)}. \quad (\text{V.4.21})$$

Отсюда дифракционный коэффициент сферического микрофона

$$D_{\text{сф}} = \frac{|\langle p_a \rangle|}{|p_0|} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2 a^2}}. \quad (\text{V.4.22})$$

Дифракционные коэффициенты, рассчитанные по формулам (V.2.28) и (V.4.22), относят к микрофонам, когда выполняются граничные условия Неймана. Обычно микрофоны отвечают этим граничным условиям, если чувствительный элемент выполнен из пьезокристалла. Но если в микрофонах применяют подвижные элементы (например, ленточный микрофон), то необходимо все расчеты изменить и учесть импеданс активной части его поверхности.

Теорема взаимности в акустике. Если известно давление на поверхности цилиндра и сферы в плоском звуковом поле, то можно выяснить, выполняется ли акустическая теорема взаимности для цилиндра и для сферы.

В формулировке Гельмгольца теорема взаимности гласит: *если в заполненном воздухом пространстве, частично ограниченном простирающимися на конечное расстояние неподвижными телами, в какой-либо точке A возбуждаются звуковые волны, то обусловленный ими в какой-либо другой точке B потенциал скорости и по значению и по фазе совпадает с тем, который имел бы место в A , если бы в B находился источник звука.*

Допустим, что в точке A находится точечный источник с производительностью $dQ_0 = v_0 dS$. На расстоянии R от A в B поместим жесткий шар с радиусом a . Давление на поверхности этого шара будет обусловлено давлением падающей и рассеянной волн и определяется формулой (V.4.15), где p_0 — амплитуда свободного звукового поля простого источника:

$$p_0 = j\omega\rho \frac{dQ_0}{4\pi R} e^{j(\omega t - kR)}.$$

Давление на поверхности шара равно

$$p_a = j\omega\rho \frac{dQ_0}{4\pi R} e^{j(\omega t - kR)} \frac{1}{k^2 a^2} \sum j^{-m} \frac{P_m(\cos \theta) (2m+1)}{jD'_m(ka)} e^{j\delta'_m(ka)}. \quad (\text{V.4.23})$$

При этом B находится на поверхности шара. Радиус-вектор \mathbf{a} , проведенный от центра шара до B , с направлением \mathbf{R} составляет угол θ (рис. V.4.4).

Поместим точечный источник, ранее находившийся в точке A , в точку B на поверхности сферы. На основании формулы излучения точечного источника, расположенного на поверхности сферы, давление

в точке A

$$p_A = j\rho c \frac{v_0 \theta_0^3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} j^{-m} (2m+1) \frac{D_m(kR)}{jD'_m(ka)} e^{j\delta'_m(ka)} P_m(\theta) \times \\ \times e^{j(\omega t - \delta_m)kR} \underset{ka \gg 1}{\approx} j\rho c \frac{v_0 \theta_0^3}{4kR} e^{j(\omega t - kR)} \times \\ \times \sum (2m+1) \frac{P_m(\cos \theta) e^{j\delta'_m(ka)}}{jD'_m(ka)} e^{-jm\pi/2},$$

поскольку $D_m(kR) e^{-j\delta_m(kR)} \underset{kR \ll 1}{\approx} j \frac{1}{kR} e^{jm\pi/2}$.

Точечный источник, помещенный в B , занимает площадку на поверхности сферы $dS = \pi a^2 \sin^2 \theta_0 \approx \pi a^2 \theta_0^2$, следовательно, объемная скорость $dQ_0 = v_0 dS = v_0 \pi a^2 \theta_0^2$. Выразив $v_0 \theta_0^2$ через объемную скорость, получим

$$p_A = j\rho \omega \frac{dQ_0}{k^2 a^2} e^{j(\omega t - kR)} \frac{1}{4\pi R} \sum (2m+1) j^{-m} \frac{P_m(\cos \theta)}{jD'_m(ka)} e^{j\delta'_m(ka)}. \quad (V.4.24)$$

Из сравнения (V.4.23) и (V.4.24) видно, что давление, создаваемое в удаленной точке A малым источником, расположенным в точке B на поверхности сферы, как по амплитуде, так и по фазе равно звуковому давлению на поверхности сферы в точке, ранее занимаемой источником, если источник находится в точке A .

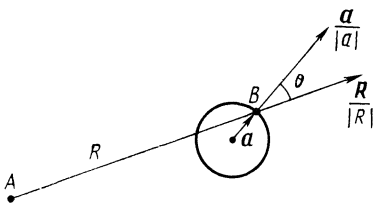


Рис. V.4.4

Этими рассуждениями полностью подтверждается акустическая теорема взаимности для точечных источников, один из которых расположен

на поверхности сферы, а другой — в достаточно удаленной точке пространства.

Аналогично можно показать применение акустической теоремы взаимности для пульсирующей линии и образующих цилиндра. Строго говоря, теорема взаимности доказана для конечных источников и использовать ее для данного случая некорректно. Однако если рассуждения применить для единицы длины линии, считая, что волна строго цилиндрическая, то получается полная тождественность полей, если линейный источник и образующую цилиндра поменять местами.

§ V.5. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАССЕИВАЮЩЕГО ШАРА

Для дальнейших преобразований полученных формул и их анализа удобно выразить комплексную функцию $h_m(z)$ через модуль и фазу:

$$h_m(z) = j_m(z) - jn_m(z) = D_m(z) e^{-j\epsilon_m(z)},$$

$$\text{где } \operatorname{tg} \epsilon_m(z) = -\frac{n_m(z)}{j_m(z)}; \quad D_m(z) = \sqrt{[j_m(z)]^2 + [n_m(z)]^2}.$$