

в точке A

$$p_A = j\rho c \frac{v_0 \theta_0^3}{4} \sum_{m=0}^{\infty} j^{-m} (2m+1) \frac{D_m(kR)}{jD'_m(ka)} e^{j\delta'_m(ka)} P_m(\theta) \times \\ \times e^{j(\omega t - \delta_m)kR} \underset{ka \gg 1}{\approx} j\rho c \frac{v_0 \theta_0^3}{4kR} e^{j(\omega t - kR)} \times \\ \times \sum (2m+1) \frac{P_m(\cos \theta) e^{j\delta'_m(ka)}}{jD'_m(ka)} e^{-jm\pi/2},$$

поскольку $D_m(kR) e^{-j\delta_m(kR)} \underset{kR \ll 1}{\approx} j \frac{1}{kR} e^{jm\pi/2}$.

Точечный источник, помещенный в B , занимает площадку на поверхности сферы $dS = \pi a^2 \sin^2 \theta_0 \approx \pi a^2 \theta_0^2$, следовательно, объемная скорость $dQ_0 = v_0 dS = v_0 \pi a^2 \theta_0^2$. Выразив $v_0 \theta_0^2$ через объемную скорость, получим

$$p_A = j\rho \omega \frac{dQ_0}{k^2 a^2} e^{j(\omega t - kR)} \frac{1}{4\pi R} \sum (2m+1) j^{-m} \frac{P_m(\cos \theta)}{jD'_m(ka)} e^{j\delta'_m(ka)}. \quad (V.4.24)$$

Из сравнения (V.4.23) и (V.4.24) видно, что давление, создаваемое в удаленной точке A малым источником, расположенным в точке B на поверхности сферы, как по амплитуде, так и по фазе равно звуковому давлению на поверхности сферы в точке, ранее занимаемой источником, если источник находится в точке A .

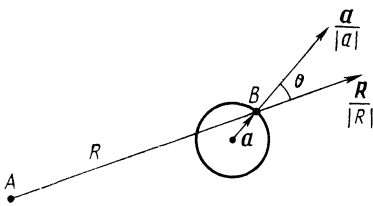


Рис. V.4.4

Этими рассуждениями полностью подтверждается акустическая теорема взаимности для точечных источников, один из которых расположен

на поверхности сферы, а другой — в достаточно удаленной точке пространства.

Аналогично можно показать применение акустической теоремы взаимности для пульсирующей линии и образующих цилиндра. Строго говоря, теорема взаимности доказана для конечных источников и использовать ее для данного случая некорректно. Однако если рассуждения применить для единицы длины линии, считая, что волна строго цилиндрическая, то получается полная тождественность полей, если линейный источник и образующую цилиндра поменять местами.

§ V.5. ДАЛЬНЕЕ ПОЛЕ ПРИ НАЛИЧИИ РАССЕИВАЮЩЕГО ШАРА

Для дальнейших преобразований полученных формул и их анализа удобно выразить комплексную функцию $h_m(z)$ через модуль и фазу:

$$h_m(z) = j_m(z) - jn_m(z) = D_m(z) e^{-j\epsilon_m(z)},$$

$$\text{где } \text{tg } \epsilon_m(z) = -\frac{n_m(z)}{j_m(z)}; \quad D_m(z) = \sqrt{[j_m(z)]^2 + [n_m(z)]^2}.$$

Однако, чтобы воспользоваться табл. П.П.3 приложения II для этих функций, следует вместо фазовой функции $\varepsilon_m(z)$ ввести $\delta_m(z) = \varepsilon_m(z) + \pi/2$. Тогда

$$h_m(z) = jD_m(z) e^{-\delta_m(z)}, \quad (\text{V.5.1})$$

где

$$\sin[\delta_m(z)] = \frac{j_m(z)}{D_m(z)}; \quad \cos[\delta_m(z)] = -\frac{n_m(z)}{D_m(z)}. \quad (\text{V.5.2})$$

Модуль $D'_m(z)$ и фазу $\delta'_m(z)$ производных цилиндрических функций Бесселя

$$\frac{dh_m}{dz} = \frac{dj_m}{dz} - j \frac{dn_m}{dz} = -jD'_m e^{-\delta'_m(z)} \quad (\text{V.5.3})$$

выражают формулами:

$$D'_m = \sqrt{[j'_m(z)]^2 + [n'_m(z)]^2},$$

$$\sin[\delta'_m(z)] = -\frac{j'_m(z)}{D'_m(z)}, \quad \cos[\delta'_m(z)] = \frac{n'_m(z)}{D'_m(z)}, \quad (\text{V.5.4})$$

где

$$j'_m(z) = \frac{dj_m(z)}{dz} = \frac{1}{2m+1} [mj_{m-1}(z) - (m+1)j_{m+1}(z)];$$

$$n'_m(z) = \frac{dn_m(z)}{dz} = \frac{1}{2m+1} [mn_m(z) - (m+1)n_{m+1}(z)].$$

Асимптотические значения сферической функции

$$D_m \approx \frac{1}{z} \approx D'_m(z), \quad \delta_m \approx \delta'_m \approx z - \frac{1}{2} \pi$$

(при $z \gg m, \quad z \gg 1$)

и

$$D_m(z) \approx \frac{(2m-1)!}{z^{m+1}}, \quad D'_m \approx \frac{m+1}{z} D_m,$$

$$\delta_0 \approx z, \quad \delta'_0 \approx \frac{4}{3} z^3, \quad \delta_m \approx \frac{57,5^\circ z^{2m+1}}{(2m+1)!(2m-1)!},$$

$$\delta'_m = -\frac{m}{m+1} \delta_m,$$

(V.5.5)

причем $(2m-1)!! = 1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \dots (2m-1)$ и $z \ll 2m-1$.

Основные формулы поля (V.4.9), выраженные через модуль и фазу $h'_m(ka)$, имеют вид:

$$\Psi_{\text{ж}} = e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} P_m(\cos \theta) \frac{j_m(kr) \cos \delta'_m + n_m(kr) \sin \delta'_m}{e^{-j\delta'_m}} =$$

$$= e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} P_m(\cos \theta) [j(kr) \cos \delta'_m(ka) +$$

$$+ n_m(kr) \sin \delta'_m(ka)] e^{j\delta'_m(ka)}, \quad (\text{V.5.6})$$

$$\Psi_s = -e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-(m+1)} e^{j\delta'_m(ka)} h_m(kr) \sin \delta'_m(ka).$$

Для дальнего поля ($kr \gg 1$)

$$\begin{aligned} \Psi_s &= -e^{j\omega t} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) j^{-m} P_m(\cos \theta) \frac{j'_m(ka)}{h'_m(ka)} \frac{1}{kr} e^{-jkr} e^{j(m+1)\pi/2} = \\ &= -\frac{e^{j(\omega t - kr)}}{kr} \sum (2m+1) P_m(\cos \theta) \sin \delta'_m e^{j\delta'_m(ka)}. \end{aligned} \quad (\text{V.5.7})$$

Давление, колебательную скорость и интенсивность определяют формулами:

$$p_s \underset{kr \rightarrow \infty}{\approx} -j \frac{\omega \rho}{kr} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{a}{r}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \theta) \sin \delta'_m e^{j\delta'_m(ka)}, \quad (\text{V.5.8})$$

$$v_s \approx -\frac{-jk}{ka} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{a}{r}\right) \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) P_m(\cos \theta) \sin \delta'_m e^{j\delta'_m(ka)},$$

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_s &= \frac{1}{2} \text{Re}(p_s^* v_s) = \mathcal{I}_i \left(\frac{1}{ka}\right)^2 \left(\frac{a}{r}\right)^2 \sum_{m,n} (2m+1)(2n+1) \times \\ &\times p_m(\cos \theta) p_n(\cos \theta) \sin \delta'_m \sin \delta'_n \cos(\delta'_m - \delta'_n), \end{aligned} \quad (\text{V.5.9})$$

где $\mathcal{I}_i = \omega r k / 2$ — интенсивность плоской волны.

В теории рассеяния звуковых волн результат анализа приводит к нескольким функциям, характеризующим рассеяние. Этими функциями являются: коэффициенты отражения r_s и r_p , рассчитанные по давлению и отнесенные к единице расстояния; коэффициент рассеяния S , рассчитанный по интенсивности и отнесенный к одному метру расстояния, и площадь эффективного сечения рассеяния Q_s .

Коэффициент отражения по давлению r_s есть отношение давления в рассеянной волне к давлению в волне падающей:

$$r_s = \frac{-j \frac{\omega \rho}{ka} e^{j(\omega t - kr)} \left(\frac{a}{r}\right) \sum (2m+1) P_m(\cos \theta) \sin \delta'_m e^{j\delta'_m}}{-j \omega \rho e^{j(\omega t - kr \cos \theta)}} = r_p \left(\frac{a}{r}\right) e^{-jkr(1 - \cos \theta)}, \quad (\text{V.5.10})$$

где $r_p = X_p + jY_p$;

$$X_p = \frac{1}{2ka} \sum (2m+1) P_m(\cos \theta) \sin [2\delta'_m(ka)];$$

$$Y_p = \frac{1}{2ka} \sum (2m+1) P_m(\cos \theta) \sin^2 [\delta'_m(ka)].$$

Штенцель [15] провел подробные расчеты параметров рассеянной волны для значений волнового фактора ka в пределах от 0,5 до 10. Расчеты сделаны с использованием других функций и содержали вычисления комплексного коэффициента отражения по давлению r_p .

Отношение интенсивности рассеянной волны к интенсивности падающей называют коэффициентом рассеяния по интенсивности S . Для

волны, рассеянной на сфере,

$$S = \frac{\mathcal{F}_s}{\mathcal{F}_i} = \left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{1}{(ka)^2} \sum_{m,n} (2m+1)(2n+1) P_m(\cos\theta) P_n(\cos\theta) \cos(\delta'_m - \delta'_n) \times \sin \delta'_m \sin \delta'_n e^{j(\delta'_m - \delta'_n)}. \quad (\text{V.5.11})$$

Коэффициент рассеяния зависит от отношения размеров сферы к длине волны ($2\pi a/\lambda$) и от угла $\pi - \theta$. На рис. V.5.1 показаны полярные диаграммы Sr^2 для рассеянной волны на сфере при выполнении условия Неймана.

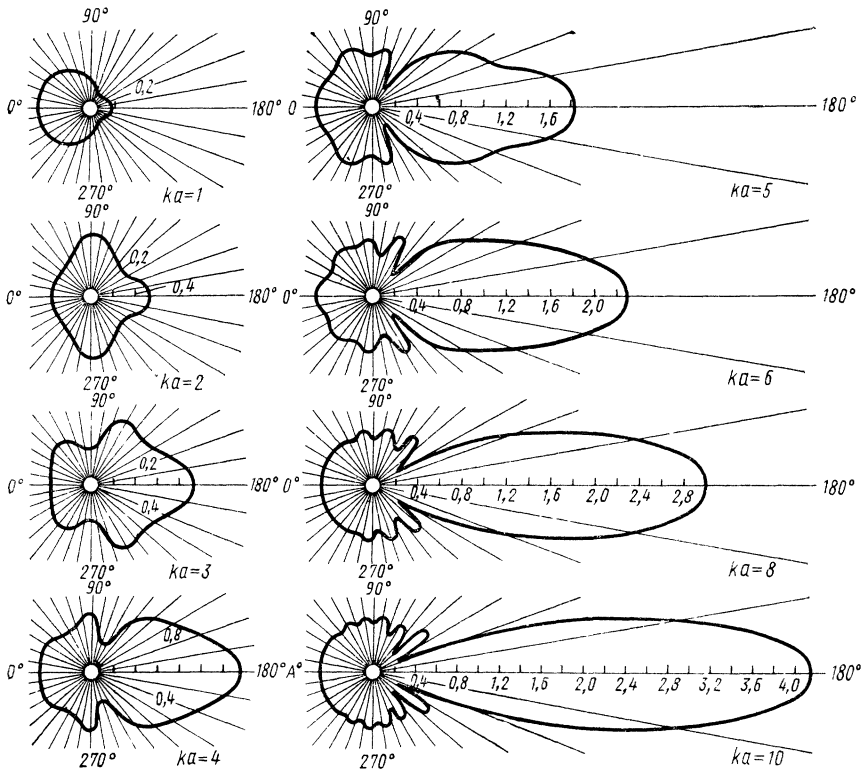


Рис. V.5.1

Отношение полной рассеянной мощности к интенсивности падающей волны имеет размерность площади и называется *эффективным поперечником рассеяния*:

$$Q_s = \frac{\mathcal{F}_s}{\mathcal{F}_i}. \quad (\text{V.5.12})$$

Чтобы вычислить полную рассеянную мощность, необходимо проинтегрировать интенсивность по поверхности сферы радиусом a . Выбрав элемент поверхности в виде полоски с угловой шириной $df = r \sin \theta 2\pi d\theta$,

Получим

$$\mathcal{F}_s = \frac{\mathcal{I}_i}{k^2 r^2} \sum_{\substack{m=0 \\ n=0}}^{\infty} (2m+1)(2n+1) \sin \delta'_m \sin \delta'_n e^{i(\delta'_m - \delta'_n)} \times \\ \times \int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu r^2 2\pi = \frac{\mathcal{I}_i}{k^2} 4\pi \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \sin^2 \delta'_m,$$

так как $\int_{-1}^{+1} P_m(\mu) P_n(\mu) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq m, \\ \frac{2}{2m+1} & \text{при } n = m. \end{cases}$

Отсюда эффективный поперечник рассеяния сферы

$$Q = \frac{4\pi a^2}{k^2 a^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \sin^2 [\delta'_m(ka)]. \quad (\text{V.5.13})$$

Формулы коэффициентов (V.5.10) — (V.5.13) рассеяния и эффективного поперечника рассеяния точные. Чтобы провести вычисления по ним, необходимо воспользоваться таблицами и электронно-вычислительной техникой.

При малых значениях ka можно воспользоваться приближенными выражениями для функций $\delta_m(ka)$ и $\delta'(ka)$ (V.5.5) и преобразовать точные формулы (V.5.10), (V.5.11), (V.5.13) к приближенным для низких частот (см. табл. V.5.1).

Таблица V.5.1

Параметр	Формулы r_p , S и Q_s для низких частот при выполнении граничного условия	
	Дирихле	Неймана
r_p	1	$\frac{4}{3} (ka)^2 \left[1 - \frac{3}{8} \cos \theta \right]$
S	$\left(\frac{a}{r}\right)^2 (1 + k^2 a^2 \cos \theta)$	$\left(\frac{a}{r}\right)^2 \frac{16}{9} (ka)^4 \left[1 - \frac{3}{8} \cos \theta + \frac{1}{32} \cos^2 \theta \right] \approx$ $\approx (a/r)^2 (16/9) (ka)^4 \left[1 - \frac{3}{8} \cos \theta \right]$
Q_s	$4\pi a^2$	$1,85 (ka)^4 4\pi a^2$

Из таблицы видно, что на низких частотах коэффициенты рассеяния по интенсивности и давлению значительно больше для мягкой сферы, чем для жесткой. В соответствии с этим эффективный поперечник рассеяния мягкой сферы равен учетверенной площади сечения сферы, в то время как для жесткой поперечник рассеяния во много раз меньше геометрического сечения. Исходя из этого, надо ожидать, что при условии, когда линейные размеры рассеивателя меньше длины волны, рассеяние на газовых полостях жидкости при всех прочих

равных условиях значительно больше, чем рассеяние на твердых частицах гидрозоля. При средних частотах вычисления коэффициента рассеяния и эффективного поперечника надо производить по точным формулам.

Как показывают расчеты, коэффициенты рассеяния плоской волны на жесткой сфере имеют характерное угловое распределение; при низких частотах угловое распределение коэффициента рассеяния становится равномерным (рис. V.5.1; направление распространения плоской волны соответствует $\theta = 180^\circ$).

При $ka = 1$ коэффициент отражения имеет большую величину в направлении, противоположном направлению распространения волны. При увеличении числа ka полярная диаграмма постепенно деформируется, превращаясь в фигуру, вытянутую в направлении распространения плоской волны.

Рассеяние коротких волн. Исследуем закономерности рассеяния сферической неоднородностью коротких волн. С этой целью найдем эффективный поперечник рассеяния Q_s и коэффициент S рассеяния сферы для случая $ka \gg 1$.

Для вывода формулы Q_s для мягкой сферы при $ka \gg 1$ представим (V.5.13) в виде трех слагаемых:

$$Q_s = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \sin^2 [\delta_m(ka)] = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{ka-n} f_m(ka) + \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{m=ka-n+1}^{ka+n} f_m(ka) + \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{m=ka+n+1}^{\infty} f_m(ka), \quad (V.5.14)$$

где $f_m(ka) = (2m+1) \sin^2 [\delta_m(ka)]$, $ka \gg n \gg 1$.

В формуле для первого слагаемого числа m меньше аргумента ka , поэтому функция $\delta_m(ka)$ может быть заменена ее приближенным выражением

$$\delta_m(ka) \underset{\substack{ka \gg 1 \\ ka \gg m}}{\approx} ka - m \frac{\pi}{2} \approx ka.$$

Тогда

$$\frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{ka-n} f_m(ka) \approx \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sin^2 ka \sum_{m=0}^{ka-n} (2m+1) = 4\pi a^2 \sin^2 ka F_1(ka), \quad (V.5.15)$$

где $F_1(ka) \sim 1/(ka) + 1$.

Численное значение $\sin^2 ka$ при $ka \gg 1$ примем равным среднему за период: $\langle \sin^2 ka \rangle = 1/2$ и, переходя к пределу при $ka \rightarrow \infty$, получим

$$\frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{m=0}^{ka-n} f_m(ka) \underset{ka \gg 1}{\approx} 2\pi a^2. \quad (V.5.16)$$

Составляющая эффективного сечения $Q_s = \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{ka-n+1}^{ka+n}$ не больше,

чем ее значение, при условии, когда $\sin^2 \delta_m(ka) = 1$, т. е.

$$Q_{s_2} < \frac{4\pi a^2}{(ka)^2} \sum_{ka-n+1}^{ka+n} (2m+1) F_2(ka),$$

где $F_2 \sim 1/ka$.

Отсюда следует, что при неограниченном возрастании ka функция $Q_{s_2}(ka)$ стремится к нулю.

Величина Q_{s_3} также стремится к нулю при $ka \rightarrow \infty$, так как для каждого $m \gg ka$

$$\delta_m(ka) = \lim_{\substack{ka \rightarrow \infty \\ ka \ll m}} \frac{ka^{2m+1}}{(2m+1)!! (2m-1)!!} = 0.$$

Таким образом, при предельно высоких частотах эффективное поперечное сечение рассеяния мягкой сферы стремится к величине, равной удвоенной площади поперечного сечения шара:

$$Q_{ms} \approx 2\pi a^2 \quad (ka \gg 1)$$

Тот же результат можно получить, если исследовать предельное выражение поперечника рассеяния жесткой сферы:

$$Q_{js} = \frac{4\pi a^2}{(ka^2)} \sum_{m=0}^{\infty} (2m+1) \sin^2 [\delta'_m(ka)]. \quad (V.5.17)$$

При этом необходимо воспользоваться следующими приближенными выражениями производных фазовых функций Ханкеля:

$$\delta'_m(ka) \approx \begin{matrix} ka - (1/2)(m-1)\pi; \\ ka \gg m \\ ka \gg 1 \end{matrix} \quad \delta'_m(ka) \approx \begin{matrix} -\frac{m}{m+1} \delta_m(ka). \\ ka \ll 2m+1 \\ ka \gg 1 \end{matrix}$$

Сравнивая эти результаты с выражением Q_s для низких частот, заметим, что поперечник рассеяния для мягкой сферы при низких частотах вдвое больше поперечника рассеяния для частот высоких. Это можно объяснить тем, что при низких частотах падающая звуковая волна возбуждает колебания, равномерно распределенные по поверхности сферы, так что на преобразование мощности плоской волны в рассеянную используется площадь, равная площади поверхности шара.

Что касается рассеяния высоких частот, то рассеянная мощность возникает в результате неравномерного возбуждения сферической поверхности плоской волной. Рассеянная волна в связи с этим разделена на две — отраженную и тенеобразующую. Для каждой из них эффективное поперечное рассеяние равно геометрическому поперечному сечению сферы.

Для вывода формулы коэффициентов рассеяния r и S при высоких частотах воспользуемся дифракционным интегралом Кирхгофа —

Гюйгенса (IV.2.12):

$$\Psi_s(\mathbf{r}) = -\frac{1}{4\pi} \int_A \left[\Psi_s(r_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) - \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial}{\partial n_0} \Psi_s(r_0^s) \right] dA, \quad (\text{V.5.18})$$

где A — поверхность рассеивателя; n_0 — единичный вектор внешней нормали к поверхности рассеивателя.

Для жесткой сферы нормальная составляющая производной потенциала скорости полного поля на поверхности сферы равна нулю:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial n_0} = \frac{\partial}{\partial n_s} (\Psi_i + \Psi_s) = 0.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n_0} \Big|_{r=a} = -\frac{\partial \Psi_s}{\partial n_0} \Big|_{r=a}. \quad (\text{V.5.19})$$

Поэтому выражение (V.5.18) можно записать так:

$$\Psi_s = -\frac{1}{4\pi} \int_A \left[\Psi_s(r_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} (e^{-jkR}/R) + (e^{-jkR}/R) \left(\frac{\partial}{\partial n_0} \Psi_i(r_0^s) \right) \right] dA,$$

где $\Psi_i = Ce^{-j(kr)}$ — плоская волна; $C = C_0 e^{-j\omega t}$.

Для коротких волн, падающих на выпуклую поверхность, часть поверхности затенена; для нее направления нормали \mathbf{n}_0 и волнового вектора \mathbf{k}_i составляют между собой острый угол. Для освещенной части поверхности угол между \mathbf{k}_i и \mathbf{n}_0 тупой. При этом под затененной частью понимают область, в которой как потенциал поля падающей волны, так и его градиент почти полностью компенсируются полем волны рассеяния. Под освещенной частью понимают ту часть поверхности, где имеется полное совпадение как по амплитуде, так и по фазе падающей и рассеянной волн. В связи с этим рассеянная волна может быть представлена в виде суммы интегралов по обеим частям поверхности: для освещенной части поверхности подставим в (V.5.19) $\Psi_s = \Psi_i$, а для затененной $\Psi_s = -\Psi_i$:

$$\begin{aligned} \Psi_s = & -\frac{1}{4\pi} \int_{A_1} \left[\Psi_i(r_0^s) \frac{\partial}{\partial n_0} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) + \frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial}{\partial n_0} \Psi_i(r_0^s) \right] dA - \\ & - \frac{1}{4\pi} \int_{A_2} \left[\frac{e^{-jkR}}{R} \frac{\partial}{\partial n} \Psi_i(r_0^s) - \Psi_i(r_0^s) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{e^{-jkR}}{R} \right) \right] dA. \quad (\text{V.5.20}) \end{aligned}$$

Первый интеграл представляет собой отраженную волну, второй — волну тенеобразующую.

Для анализа второго интеграла к существенному упрощению приводит так называемое преобразование Маджи. Суть этого преобразования состоит в следующем. Заметим, что под знаком интеграла стоит векторная функция

$$\mathbf{B} = G \text{grad } \Psi_i - \Psi_i \text{grad } G, \quad \nabla^2 \Psi_i = -k^2 \Psi_i, \quad \nabla^2 G = -k^2 G$$

($G = e^{-jkR}/R$; Ψ_i — функция плоской волны.)

Дивергенция вектора \mathbf{B} для точек с координатами \mathbf{r} , не лежащих на поверхности A , равна нулю:

$$\text{div } \mathbf{B} = G \nabla^2 \Psi_i + \nabla G \nabla \Psi_i - \Psi_i \nabla^2 G - \nabla \Psi_i \nabla G = G \nabla^2 \Psi_i - \Psi_i \nabla^2 G = 0.$$

На основании известного тождества $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{D} = 0$ можно принять вектор \mathbf{B} за ротор некоторого вектора \mathbf{D} : $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{D}$. Применяв теорему Стокса, получим

$$\frac{1}{4\pi} \int_A \operatorname{rot} \mathbf{D} dA = \frac{1}{4\pi} \oint_s \mathbf{B} ds,$$

где контурный интеграл берут по линии на поверхности, отделяющей теневую часть от освещенной (по теневой линии). При этом векторная функция \mathbf{D} зависит от функции Грина G , интеграла тенеобразующей волны, формы падающей волны, но не зависит от геометрической формы отражающей поверхности. Отсюда следует интересный вывод: тенеобразующая волна одинакова для всех поверхностей, имеющих одинаковую теневую линию. Она совершенно одинакова как для плоского, так и для выпуклого рассеивателя при условии, что теневые линии этих тел совпадают. Поэтому ниже приведены расчеты рассеяния для плоского диска. Результаты этих расчетов применимы для рассеяния на сфере того же диаметра.

Тенеобразующая волна обратна по знаку волне, излучаемой круглой пластиной, колеблющейся с той же фазой и амплитудой, что и у падающей волны. Пластина имеет радиус шара ($r = a$), центр диска совпадает с центром шара, нормаль совпадает с направлением распространения падающей волны. Для того чтобы произвести интегрирование по поверхности пластины в асимптотическом приближении ($kr \rightarrow \infty$), выберем полярные координаты r_0 , φ_0 , лежащие в плоскости пластины. Плоскую волну определяют формулой $e^{-ikr \cos \theta} = \Psi_i$; e^{-ikR}/R можно представить в виде

$$\frac{e^{-i(kr - k_s r_0)}}{r - \Delta r} \approx \frac{e^{-ikr}}{r} e^{-jk_s r_0},$$

где \mathbf{k}_s — вектор, характеризуемый волновым числом k , углами θ и φ и направленный к точке наблюдения.

Тогда потенциал тенеобразующей волны может быть найден при преобразовании второго интеграла (V.5.20) в приближении Кирхгофа [см. (III.2.14)]:

$$\int_{A_2} \approx -\frac{1}{4\pi} \int_{A_2} \left[-\frac{\partial \Psi_i}{\partial n_0} (1 + \cos \theta) \frac{e^{+jk \Delta r}}{r} \right] dA.$$

Здесь градиент потенциала $\partial \Psi_i / \partial n_0$ взят по направлению нормали к поверхности диска и равен

$$\frac{\partial \Psi_i}{\partial n_0} = \frac{\partial}{\partial x} e^{-jkx} \Big|_{x=0} = -jk.$$

Следовательно,

$$\int_{A_2} = -\frac{1}{4\pi} (-jk) (1 + \cos \theta) \int_{A_2} e^{jk \Delta x} dA \frac{e^{-jkr}}{r}.$$

Ранее было показано, что

$$\int_0^a \left(\int_0^{2\pi} e^{+jkr_0 \sin \theta \cos \varphi} d\varphi \right) r_0 dr_0 = 2\pi \int_0^a \mathcal{J}_0(kr_0 \sin \theta) r_0 dr_0.$$

С учетом этого выражения получим

$$\Psi_{A_2} = \frac{jk}{4\pi} (1 + \cos \theta) 2\pi \int_0^a \mathcal{I}_0(kr_0 \sin \theta) r_0 dr_0.$$

Наконец, пользуясь известным интегральным соотношением $\int z \mathcal{I}_0(z) dz = \mathcal{I}_1(z)$, найдем

$$\int_0^a \mathcal{I}_0(kr_0 \sin \theta) r_0 dr_0 = \frac{\mathcal{I}_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}.$$

В результате получим формулу потенциала тенеобразующей волны:

$$\Psi_{A_2} = jk \frac{a^2}{2} (1 + \cos \theta) \frac{\mathcal{I}_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \frac{e^{-jkr}}{r}.$$

Что касается интеграла, соответствующего волне, отраженной от освещенной части сферы, то его преобразование здесь не приведено (см. [6]). Ограничимся лишь окончательным результатом:

$$\Psi_{A_1} = -\frac{a}{2r} e^{-i\left(kr - 2ka \sin \frac{\theta}{2}\right)}.$$

Отсюда видно, что амплитуда отраженной волны не зависит от угла θ , а фаза отличается от фазы падающей волны на $2ka \sin(\theta/2) - \pi$. Таким образом, полная рассеянная волна (V.5.20) при $ka \gg 1$ определяется формулой

$$\Psi_s = Cf(\theta) \frac{e^{-jkr}}{r},$$

где $C = e^{j\omega t}$, $f(\theta) = +j \frac{a}{2} \left[+je^{2jka \sin \frac{\theta}{2}} + ka \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{2\mathcal{I}_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]$.

В соответствии с этим выражением находим звуковое давление, колебательную скорость и интенсивность полной рассеянной волны:

$$p_s = j\omega \rho f(\theta) \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad v_s = jkf(\theta) \frac{e^{-jkr}}{r}, \quad \mathcal{I}_s = \frac{\omega \rho k}{2} f^x(\theta) f(\theta) \frac{1}{r^2}.$$

Наконец, заменяя $\omega \rho k/2$ на \mathcal{I}_i (интенсивность падающей волны), получим формулу коэффициента рассеяния сферы при высоких частотах:

$$S = \frac{a}{2r} \left\{ 1 + \left[ka \frac{1 + \cos \theta}{2} \frac{2\mathcal{I}_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right]^2 \right\}. \quad (\text{V.5.21})$$

Здесь первое слагаемое выражает часть коэффициента рассеяния для волны, отраженной от освещенной части сферы, а второе — часть, соответствующую тенеобразующей волне.

Эффективное поперечное сечение жесткой сферы при высоких частотах

$$Q = \frac{\mathcal{I}_s}{\mathcal{I}_i} \approx \left[\frac{a^2}{4r^2} + \frac{a^2}{4r^2} \text{ctg}^2 \frac{\theta}{2} \mathcal{I}_1^2(ka \sin \theta) \right]. \quad (\text{V.5.22})$$

Первый член этой формулы соответствует отраженной волне, распределенной по всем направлениям с равномерным амплитудным рас-

пределением, но с фазой, изменяющейся по закону $2ka \sin(\theta/2)$; второй характеризует тенеобразующую волну. Он имеет ярко выраженную асимметрию: при угле $\theta = 0$ величина второго члена соответствует $\frac{a^2}{4r^2} (ka)^2$.

По мере увеличения угла θ , т. е. по мере отклонения от направления падающей волны, интенсивность тенеобразующей волны быстро убывает и вскоре весь второй член становится меньше первого. Как уже сказано, тенеобразующая волна имеет в каждой точке пространства амплитуду, одинаковую с амплитудой падающей волны, как бы проходящей через отверстие в жестком экране, площадь которого равна площади поперечного сечения тела, причем фаза волны противоположна по отношению к фазе падающей. В результате интерференции этих волн за рассеивающим телом образуется тень с характерными особенностями на границе, связанными с дифракцией на краях колеблющегося диска.

§ V.6. РАССЕЙАНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПУЗЫРЬКАХ ГАЗА В ЖИДКОСТИ

Постановка и классификация задач о рассеянии волн. Задача о дифракции на многих телах относится ко многим физическим явлениям, связанным с рассеянием волн на неоднородностях. (В оптике — критическая опалесценция смесей жидкостей, явление красной зари и голубого цвета неба, явление Тиндаля, когда ярко проявляется рассеяние поляризованного света в определенных направлениях, и т. д.; в ядерной физике — рассеяние нейтронов; в теории металлического состояния — рассеяние электронных волн. Сюда же относят все случаи дифракции рентгеновских лучей.) Несмотря на то что эти явления принадлежат к различным областям физики, методы изучения рассеяния на совокупности неоднородностей сходны, поэтому повсюду применяют одинаковую терминологию. Рассмотрим основные понятия общей теории рассеяния волн на совокупности рассеивателей. Задача о рассеянии волн на многих частицах сложна и поддается анализу в двух крайних случаях. Когда поперечник рассеяния меньше геометрического сечения частицы (например, рассеяние длинных волн на жестких частицах, взвешенных в воде), то следует говорить о слабом рассеянии. Если поперечник рассеяния значительно больше, чем геометрическое поперечное сечение отдельных неоднородностей, то следует говорить о сильном рассеянии (например, рассеяние звука на газовых пузырьках в жидкости).

При достаточном удалении друг от друга неоднородностей можно не принимать во внимание влияние на процесс рассеяния соседних рассеивателей и считать их действие независимым.

Если же расстояния между центрами рассеивателей небольшое, то это требует другого подхода, так как волна, рассеянная одним рассеивателем, будет повторно рассеиваться другими, что создает довольно запутанную картину суммарного эффекта.

Рассмотрим случай рассеяния звука на пузырьках газа в жидкости, считая, что рассеяния на отдельных пузырьках независимы.

Пусть на газовый пузырек, взвешенный в жидкости, падает волна, потенциал скорости которой

$$\Psi_i = Be^{-ikr \cos \theta} e^{j\omega t}. \quad (V.6.1)$$

При этом частота звуковой волны удовлетворяет условию $\omega a/c_1 \ll 1$, т. е. длина волны в жидкости $\lambda_1 \gg 2\lambda a$. Под действием этой волны газовый пузырек будет испытывать периодические всесторонние сжа-