пределением, но с фазой, изменяющейся по закону $2ka\sin(\theta/2)$; второй характеризует тенеобразующую волну. Он имеет ярко выраженную асимметрию: при угле $\theta=0$ величина второго члена соответствует $\frac{a^2}{4r^2}(ka)^2$.

По мере увеличения угла θ, т. е. по мере отклонения от направления падающей волны, интенсивность тенеобразующей волны быстро убывает и вскоре весь второй член становится меньше первого. Как уже сказано, тенеобразующая волна имеет в каждой точке пространства амплитуду, одинаковую с амплитудой падающей волны, как бы проходящей через отверстие в жестком экране, площадь которого равна площади поперечного сечения тела, причем фаза волны противоположна по отношению к фазе падающей. В результате интерференции этих волн за рассеивающим телом образуется тень с характерными особенностями на границе, связанными с дифракцией на краях колеблющегося диска.

§ V.6. РАССЕЯНИЕ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА ПУЗЫРЬКАХ ГАЗА В ЖИДКОСТИ

Постановка и классификация задач о рассеянии волн. Задача о дифракции на многих телах относится ко многим физическим явлениям, связанным с рассеянием волн на неоднородностях. (В оптике — критическая опалесценция смесей жидкостей, явление красной зари и голубого цвета неба, явление Тиндаля, когда ярко проявляется рассеяние поляризованного света в определенных направлениях, и т. д.; в ядерной физике — рассеяние нейтронов; в теории металлического состояния — рассеяние электронных волн. Сюда же относят все случаи дифракции рентгеновских лучей.) Несмотря на то что эти явления принадлежат к различным областям физики, методы изучения рассеяния на совокупности неоднородностей сходны, поэтому повсюду применяют одинаковую терминологию. Рассмотрим основные понятия общей теории рассеяния волн на совокупности рассеивателей. Задача о рассеянии волн на многих частицах сложна и поддается анализу в двух крайних случаях. Когда поперечник рассеяния меньше геометрического сечения частицы (например, рассеяние длинных волн на жестких частицах, взвешенных в воде), то следует говорить о слабом рассеянии. Если поперечник рассеяния значительно больше, чем геометрическое поперечное сечение отдельных неоднородностей, то следует говорить о сильном рассеянии (например, рассеяние звука на газовых пузырьках в жидкости).

При достаточном удалении друг от друга неоднородностей можно не принимать во внимание влияние на процесс рассеяния соседних рассеивателей и считать их действие независимым.

Если же расстояние между центрами рассеивателей небольшое, то это требует другого подхода, так как волна, рассеянная одним рассеивателем, будет повторно рассеиваться другими, что создает довольно запутанную картину суммарного эффекта.

Рассмотрим случай рассеяния звука на пузырьках газа в жидкости, считая, что рассеяния на отдельных пузырьках независимы.

Пусть на газовый пузырек, взвешенный в жидкости, падает волна, потенциал скорости которой

$$\Psi_i = Be^{-jkr\cos\theta}e^{j\omega t}. \tag{V.6.1}$$

При этом частота звуковой волны удовлетворяет условию $\omega a/c_1 \ll 1$, т. е. длина волны в жидкости $\lambda_1 \gg 2\pi a$. Под действием этой волны газовый пузырек будет испытывать периодические всесторонние сжатия и разряжения. Внутри пузырька давление испытывает периоди ческие изменения относительно среднего давления p_0. Если допустить, что газ внутри пузырька подчиняется адиабатическому закону, то

$$\delta p = -\gamma p\, \delta V/V.$$

Заменяя $\gamma p = \rho c^2$ и $\delta V = 4\pi a^2\, \delta a$, получаем:

$$-\frac{\partial}{\partial t}\delta p = -j\omega\, \delta p = \rho c^2 \frac{4\pi a^2}{\frac{4}{3}\pi a^3}\frac{\partial(\delta a)}{\partial t} = \rho c^2 \frac{3 v_0 e^{j\omega t}}{a}; \qquad (V.6.2)$$

$$\delta p = j\frac{3\rho c^2}{a\omega} v_0 e^{j\omega t}, \qquad (V.6.3)$$

где δp — добавочное давление внутри пузырька; $v_0 e^{j\omega t}$ — радиальная скорость поверхности; γ — отношение теплоемкостей при постоянном давлении и объеме; ρ — плотность газа внутри пузырька.

Поскольку речь идет о низких частотах, можно считать, что рассеянная волна представляет собой сферическую волну нулевого порядка, исходящую от пульсирующей сферы:

$$\Psi_s = \frac{A}{r} e^{j(\omega t - kr)}. \qquad (V.6.4)$$

На поверхности сферы должны выполняться условия непрерывности давления и радиальной составляющей скорости. Обозначим плотность жидкости ρ_1. Тогда давление на поверхности сферы за счет падающей волны

$$\rho_1 \frac{\partial \Psi_i}{\partial t} = \rho_1 j\omega B e^{-jka\cos(\theta + j\omega t)} \underset{ka \ll 1}{\approx} \rho_1 j\omega B e^{j\omega t} = p_0 e^{j\omega t},$$

а давление, возникающее за счет отраженной волны,

$$\rho_1 \frac{\partial \Psi_s}{\partial t} = \frac{A j\omega_1 \rho_1}{a} e^{j\omega t} e^{-jka} \underset{ka \ll 1}{\approx} \frac{A j\omega\rho_1}{a} e^{j\omega t}.$$

Давление внутри воздушного пузырька определяется формулой (V.6.3), а на поверхности пузырька равно сумме внешних давлений

$$j\frac{3\rho c^2}{\omega a} v_0 = p_0 + j\frac{\omega\rho_1}{a} A. \qquad (V.6.5)$$

Радиальная скорость равна

$$\left.\frac{\partial \Psi_s}{\partial r}\right|_{r=a} + \left.\frac{\partial \Psi_i}{\partial r}\right|_{r=a} = -v_a;$$

$$\left[-A\left(\frac{1}{r^2} + j\frac{k_1}{r}\right) + \frac{\partial \Psi_i}{\partial r}\right]_{r=a} = -v_a.$$

Для плоской волны

$$\left.\frac{\partial \Psi_i}{\partial r}\right|_{r=a} = -jk\cos\theta B e^{-jka\cos\theta} \underset{ka \to 0}{\approx} -jk\cos\theta,$$

поэтому уравнение для низких частот можно привести к виду

$$A\left(\frac{1}{a^2} + \frac{jk_1}{a}\right) + Bjk\cos\theta = v_0 \qquad (V.6.6)$$

Согласно (V.6.3), радиальная скорость при низких частотах не зависит от угла θ, поэтому для них $Bk=0$. Следовательно,

$$v_0 = A\left(\frac{1}{a^2} + \frac{j\omega}{ac_1}\right). \qquad \text{(V.6.7)}$$

Решая систему уравнений (V.6.5) и (V.6.7) относительно A, получаем

$$A = \frac{a\rho_0/(j\omega\rho_1)}{(\omega_0/\omega)^2 - 1 - jD/\omega}, \qquad \text{(V.6.8)}$$

где $D=3\rho c^2/(a\rho_1 c_1)$ — постоянная затухания пульсирующих колебаний пузырька за счет излучения; $\omega_0^2 = 3\rho c^2/(a^2\rho_1)$ — резонансная частота колебаний пузырька.

Подставляя (V.6.8) в формулу потенциала рассеянной волны, получаем

$$\Psi_s = -\frac{a\rho/(j\omega\rho_1)}{[(\omega_0/\omega)^2-1]+jD/\omega}\,\frac{1}{r}\,e^{j(\omega t - \omega r/c_1)}. \qquad \text{(V.6.9)}$$

То, что ω_0, входящее в (V.6.9), действительно является собственной частотой колебаний пузырька, следует из простых соображений.

Сферический пульсирующий пузырек представим как колебательную систему с сосредоточенными массой $m_э$ и гибкостью $c_э$. В качестве эквивалентной массы здесь следует принять присоединенную массу пульсирующих колебаний сферы для низких частот. Присоединенная масса колебаний сферы равна утроенной массе жидкости, вытесненной сферой:

$$m_э = 3M_{сф} = 4\pi a^3\rho_1.$$

Эквивалентная гибкость $c_э$ есть отношение изменения радиуса сферы к общей сжимающей силе: $c_э = -\delta a/(\delta F)$. Для получения эквивалентной гибкости умножим (V.6.2) на $4\pi a^2\,dt$:

$$\delta F = 4\pi a^2 \delta p = -3\rho c^2 a\delta a,$$

откуда

$$c_э = \frac{1}{4\pi a\cdot 3\rho c^2}.$$

Резонансная частота данной системы определяется формулой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{m_э c_э}}.$$

Производя простые преобразования, получаем

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{4a^3\rho_1(4\pi a^2\cdot 3\rho c^2)^{-1}}} = \sqrt{\frac{3\rho c^2}{4\pi a^2\rho_1}}.$$

Таким образом, частота ω_0, входящая в (V.6.9), действительно имеет смысл резонансной частоты пульсирующих колебаний сферического объема газа, погруженного в жидкость.

Удобно в формулу резонансной частоты вместо ρc^2 ввести значения этой величины для идеального газа:

$$\rho c^2 = \gamma p_{01},$$

где p_{01} — общее давление в воздушном пузырьке, состоящее из атмосферного давления, давления столба жидкости, т. е. гидростатического давления и давления Лапласа.

В этом случае формула резонансной частоты для воздушного пузырька жидкости имеет вид, удобный для численных оценок резонансной частоты:

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi a} \sqrt{\frac{3\gamma p_{01}}{\rho_1}}. \qquad \text{(V.6.10)}$$

Если пренебречь гидростатическим давлением и давлением за счет искривления поверхностей пленки и подставить в эту формулу вместо общего давления атмосферное (дин/см^2), отношение теплоемкости $\gamma = c_p/c_v = 1{,}4$, плотность воды $\rho_1 = 1$ г/см^3, то получим

$$f_0 a = 326 \text{ Гц} \cdot \text{см}. \qquad \text{(V.6.11)}$$

Эта формула довольно хорошо подтверждается экспериментальными данными.

Резонансный радиус пузырька всегда значительно меньше длины звуковой волны в воде. Например, для частоты 1 кГц длина волны в воде составляет 1,5 м, резонансный радиус пузырька 0,33 см. Для частоты 50 кГц длина волны в воде 3 см, а резонансный радиус воздушного пузырька составляет всего 0,006 см. Таким образом, формула (V.6.9), полученная в предположении, что длина волны в жидкости во много раз больше радиуса пузырька газа, может быть применена к области резонансных частот.

Коэффициент рассеяния волн давления для одиночного воздушного пузырька есть отношение потенциала рассеянной волны (V.6.9) к потенциалу падающей (V.6.1). После выполнения простой операции деления Ψ_s на Ψ_i получим

$$r_s = \frac{\Psi_s}{\Psi_i} = \frac{a}{\sqrt{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + (D/\omega)^2}} \frac{1}{r} e^{-j[k_1 r(1-\cos\theta) + \alpha]}, \qquad \text{(V.6.12)}$$

где $\dfrac{a}{\sqrt{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + (D/\omega)^2}}$ — модуль коэффициента рассеяния; α — фаза.

Эффективный поперечник рассеяния, т. е. полная мощность рассеянной волны, отнесенная к интенсивности волны падающей, определяется формулой

$$Q_s = \frac{p_s^* p_s}{p_0^2} 4\pi r^2 = \frac{4\pi a^2}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + (D/\omega)^2}. \qquad \text{(V.6.13)}$$

Выражение (V.6.13) показывает, что для частот $\omega \ll \omega_0$, значительно меньших резонансной, эффективный поперечник рассеяния близок к нулю. При частоте, совпадающей с частотой резонанса, эффективный поперечник рассеяния

$$Q_{0_s} = \frac{4\pi a^2 \omega^2}{D^2}. \qquad \text{(V.6.14)}$$

Учет видов потерь в объеме пузырька осуществляют введением эффективного поперечника поглощения Q_a, т. е. отношения средней мощности, поглощенной пузырьком, к интенсивности падающей волны.

Полное эффективное поперечное сечение есть сумма эффективных сечений поглощения и рассеяния: $Q_t = Q_s + Q_a$.

Можно показать, что

$$Q_t = \frac{4\pi a^2 [1 + \delta/(k_1 a)]}{[(\omega_0/\omega)^2 - 1]^2 + \delta^2(\omega)}, \qquad (V.6.15)$$

где $\delta(\omega)$ — величина, характеризующая затухание колебаний пузырька за счет поглощения и излучения; $k_1 a = \omega a / c_1$; c_1 — скорость звука в жидкости.

Допустим, что в жидкости имеются пузырьки газа одинакового размера. Число пузырьков в единице объема n. Найдем интенсивность плоской волны, которая пройдет через слой пузырьков толщиной d, если известна интенсивность падающей волны $\mathcal{J}_0$.

В слое площадью dS и толщиной dx, имеющем координаты x, $x + dx$, содержится $n(x)\,dx\,dS$ пузырьков воздуха. Мощность, поглощаемая пузырьками слоя, равна $d\mathcal{J}\,dS = -n(x)\,dx\,Q_t\mathcal{J}\,dS$. Отсюда получаем дифференциальное уравнение

$$\frac{d\mathcal{J}}{\mathcal{J}} = -n_0(x)\,Q_t\mathcal{J}\,dx,$$

решая которое находим интенсивность звуковой волны, прошедшей через слой толщиной d:

$$\mathcal{J}_d = \mathcal{J}_0 e^{-Q_s \int_0^d n(x)\,dx}.$$

Интеграл $\int_0^d n(x)\,dx = N_1 d$ представляет собой общее число пузырьков в объеме цилиндра единичного сечения с толщиной d.

Обозначив среднее число частиц, приходящихся на единицу длины, через $\frac{1}{d}\int_0^d n(x)\,dx = N_1$, получим

$$J_a = J_0 e^{-Q_t N_1 d}.$$

Отсюда следует, что ослабление интенсивности волны слоем пузырьков толщиной 1 см составляет

$$D = 10 \lg \frac{J_0}{J_1} = 10 \lg e\, N_1 Q_t = 4{,}34\, N_1 Q_t \text{ (дБ)}, \qquad (V.6.16)$$

где N_1 — число резонансных пузырьков, Q_t — их поперечное сечение рассеяния.

Если размеры пузырьков неодинаковы и их можно разделить по размерам на некоторое число групп, то полное ослабление есть сумма ослаблений на пузырьках каждого размера:

$$D = D_1 + D_2 + D_3 + \ldots$$

В общем случае размеры пузырьков в воде подчиняются закону распределения Пуассона: число пузырьков в единице объема, имеющих радиусы a, $a+da$,

$$n(a)=\frac{dN}{da}=A\,(la)^m e^{-la},$$

где A, l и m — экспериментально определяемые числа.

Доля поглощения за счет пузырьков размером от a до $a+da$ составляет $dD=n(a)\,da\,Q_t(a)$. Полное ослабление $D=\int\limits_0^\infty n(a)\,Q_t(a)\,da$. Практически основная часть поглощения приходится на пузырьки резонансных размеров. Поэтому последняя формула сводится к (V.6.16).

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В КАНАЛАХ И ТРУБАХ

§ VI.1. ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА

Волноводное распространение акустических колебаний происходит при условии, когда акустические волны возбуждаются в среде, ограниченной незамкнутой поверхностью, по обе стороны которой вещество имеет различные акустические свойства. В отличие от открытого пространства, для которого характерно ослабление волнового поля из-за геометрического расхождения волн во все стороны, при волноводном распространении этого ослабления не происходит.

Волноводное распространение звука наблюдается как в природных условиях, так и в различных технических устройствах.

К естественным волноводам (их часто называют каналами) относят различные слоистые среды, ограниченные поверхностями, имеющими большую отражательную способность для звуковых волн. Это моря и океаны, для которых верхней границей является воздух, а нижней — донные отложения. Кроме того, в природе встречаются также волноводы, в которых границы выражены не резко. Эти волноводы образуются в толще атмосферы, а также в море за счет особого распределения значений скорости звука с высотой. При некоторых условиях температура воды и соленость изменяются с высотой так, что на некоторой глубине фазовая скорость имеет минимальное числовое значение. На уровнях, лежащих выше и ниже поверхности с минимумом скорости, среда акустически неоднородна: скорость звука с увеличением расстояния от этого уровня увеличивается. В связи с этим звуковые лучи, проходящие через поверхность минимума скорости звука, испытывают рефракцию, в результате чего периодически искривляются.

К простейшим искусственным волноводам принадлежат трубы и щели с жесткими стенками.

Характер волноводного распространения довольно сложен. Он определяется геометрической конфигурацией волновода, свойствами граничных поверхностей и способом возбуждения акустических колебаний. При этом волноводное распространение имеет несколько осо-