В общем случае размеры пузырьков в воде подчиняются закону распределения Пуассона: число пузырьков в единице объема, имеющих радиусы a, $a+da$,

$$n(a)=\frac{dN}{da}=A\,(la)^m e^{-la},$$

где A, l и m — экспериментально определяемые числа.

Доля поглощения за счет пузырьков размером от a до $a+da$ составляет $dD=n(a)\,da\,Q_t(a)$. Полное ослабление $D=\int\limits_0^\infty n(a)\,Q_t(a)\,da$. Практически основная часть поглощения приходится на пузырьки резонансных размеров. Поэтому последняя формула сводится к (V.6.16).

ГЛАВА VI

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА В КАНАЛАХ И ТРУБАХ

§ VI.1. ВОЛНОВОДНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЗВУКА

Волноводное распространение акустических колебаний происходит при условии, когда акустические волны возбуждаются в среде, ограниченной незамкнутой поверхностью, по обе стороны которой вещество имеет различные акустические свойства. В отличие от открытого пространства, для которого характерно ослабление волнового поля из-за геометрического расхождения волн во все стороны, при волноводном распространении этого ослабления не происходит.

Волноводное распространение звука наблюдается как в природных условиях, так и в различных технических устройствах.

К естественным волноводам (их часто называют каналами) относят различные слоистые среды, ограниченные поверхностями, имеющими большую отражательную способность для звуковых волн. Это моря и океаны, для которых верхней границей является воздух, а нижней — донные отложения. Кроме того, в природе встречаются также волноводы, в которых границы выражены не резко. Эти волноводы образуются в толще атмосферы, а также в море за счет особого распределения значений скорости звука с высотой. При некоторых условиях температура воды и соленость изменяются с высотой так, что на некоторой глубине фазовая скорость имеет минимальное числовое значение. На уровнях, лежащих выше и ниже поверхности с минимумом скорости, среда акустически неоднородна: скорость звука с увеличением расстояния от этого уровня увеличивается. В связи с этим звуковые лучи, проходящие через поверхность минимума скорости звука, испытывают рефракцию, в результате чего периодически искривляются.

К простейшим искусственным волноводам принадлежат трубы и щели с жесткими стенками.

Характер волноводного распространения довольно сложен. Он определяется геометрической конфигурацией волновода, свойствами граничных поверхностей и способом возбуждения акустических колебаний. При этом волноводное распространение имеет несколько особенностей. К ним относят наличие дисперсии скорости для высших форм волны, способность возбуждения в волноводе одновременно нескольких видов волн заданной частоты. Для подробного ознакомления с этими особенностями рассмотрим несколько простейших случаев волноводного распространения звука.

Плоский одномерный жидкий волновод. Рассмотрим распространение гармонических волн в жидком слое, ограниченном плоскими стенками, расположенными на некотором расстоянии друг от друга.

Предположим, что звуковое поле в жидком слое зависит от координат x, z и времени t, так что потенциал скорости выражается гармонической функцией времени:

$$\Phi(z, x, t) = \psi(x, z) e^{j\omega t}.$$

После подстановки этой функции в волновое уравнение приходим к уравнению Гельмгольца относительно функции $\psi(x, z)$:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0. \qquad \text{(VI.1.1)}$$

Его решение должно удовлетворять условию излучения волны вдоль координаты x. В связи с этим представим функцию $\psi(x, z)$ в виде волны, распространяющейся в сторону положительных значений оси X:

$$\psi(x, z) = \varphi(z) e^{-jk_x x}. \qquad \text{(VI.1.2)}$$

После подстановки в уравнение Гельмгольца получим обыкновенное дифференциальное уравнение относительно $\varphi(z)$:

$$\frac{d^2\varphi}{\partial z^2} + k_z^2\varphi = 0, \qquad \text{(VI.1.3)}$$

где

$$k_z^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_x^2. \qquad \text{(VI.1.4)}$$

Решением этого уравнения является функция $\varphi(z)$, соответствующая волнам, распространяющимся навстречу друг другу перпендикулярно оси волновода:

$$\varphi(z) = Ae^{-jk_z z} + Be^{jk_z z}. \qquad \text{(VI.1.5)}$$

В итоге находим, что волновая функция $\Phi(x, z, t)$ имеет вид

$$\Phi(x, z, t) = \left(Ae^{-jk_z z} + Be^{jk_z z}\right)e^{j(\omega t - k_x x)}. \qquad \text{(VI.1.6)}$$

Пользуясь формулами $p = \rho\frac{\partial\dot{\Phi}}{\partial t}$, $\dot{\xi}_n = -\frac{\partial\Phi}{\partial x}$, $\dot{\xi}_z = -\frac{\partial\Phi}{\partial z}$, найдем выражение для звукового давления и колебательной скорости в волноводе:

$$p = j\omega\rho\left(Ae^{-jk_z z} + Be^{jk_z z}\right)e^{j(\omega t - k_x x)};$$

$$\dot{\xi}_z = jk_z\left(Ae^{-jk_z z} - Be^{jk_z z}\right)e^{j(\omega t - k_x x)}. \qquad \text{(VI.1.7)}$$

Для нахождения постоянных интегрирования, как всегда, следует использовать граничные условия. Рассмотрим случай, когда жидкий слой ограничен двумя плоскостями, на которых нормальная составляющая колебательной скорости равна нулю. Используя граничное условие для уровня $z=0$ и выражение для $\dot{\xi}_z$ из (VI.1.7), получим $(A-B)\,e^{j(\omega t - k_x x)}=0$, откуда $A=B$. С учетом этого результата найдем:

$$\begin{aligned} \Phi(x,\ z,\ t) &= 2A\cos(k_z z)\,e^{j(\omega t - k_x x)}, \\ \dot{\xi} &= -2Ak_z\sin(k_z z)\,e^{j(\omega t - k_x x)}, \end{aligned} \qquad \text{(VI.1.8)}$$

где $\dot{\xi}$ — составляющая колебательной скорости по оси Z.

Чтобы удовлетворить второму граничному условию, приходится подбирать специальные значения волнового числа k_z, а именно такие, чтобы на границе $z=h$ колебательная скорость также обращалась в нуль. Это приводит к дисперсионному уравнению для жидкого слоя, ограниченного жесткими стенками:

$$\sin(k_z h)=0. \qquad \text{(VI.1.9)}$$

Решением является дискретный ряд значений волнового числа:

$$k_z=\frac{m\pi}{h}\quad (m=0,\ 1,\ 2,\ldots).$$

Из соотношения (VI.1.4) следует, что поскольку волновые числа k_z могут принимать только вполне определенные значения, кратные m, то волновые числа распространения k_x, кроме того что они зависят от частоты ω, определяются также целочисленными значениями m и геометрическим размером волнового слоя:

$$k_x=\sqrt{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2-\left(\frac{m\pi}{h}\right)^2}=\frac{\omega}{c}\,\tau_m, \qquad \text{(VI.1.10)}$$

где

$$\tau_m=\left[1-\left(\frac{m\pi c}{h\omega}\right)^2\right]^{1/2}. \qquad \text{(VI.1.11)}$$

Это значит, что из всех возможных функций, являющихся решением волнового уравнения, отвечает возможным волновым процессам в жидком слое только дискретный набор гармонических волн с частотой ω:

$$\Phi_m=A_m\cos\left(\frac{m\pi z}{h}\right)e^{j\omega(1-\tau_m x/c)}. \qquad \text{(VI.1.12)}$$

Таким образом, вдоль жидкого слоя с жесткими стенками могут распространяться волны, амплитуда которых не постоянна по поперечному сечению слоя (вдоль фронта волны), а определяется гармонической функцией z: $\cos(m\pi z/h)$. Каждая из волн при распространении не меняет своей формы, а фазовая скорость распространения является функцией частоты:

$$c_m=\frac{c}{\tau_m}=c\left[1-\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad \text{(VI.1.13)}$$

где

$$\omega_m = \frac{m\pi c}{h} \tag{VI.1.14}$$

— критическая частота волны m-го порядка.

Волны, форма которых не изменяется при распространении, называют *нормальными*. В данном случае волны, описываемые волновыми функциями (VI.1.12), представляют собой нормальные волны плоского жидкого волновода с жесткими стенками. На рис. VI.1.1 показаны поперечные резонансы волн давления в слое с толщиной h, ограниченной жесткими стенками.

Необходимо отметить, что в данном случае эти резонансы определяются только волновым числом $k_z = m\pi/h$, они не зависят от частоты ω, а также от упругих свойств среды, в которой распространяются нормальные волны.

Среди всех допустимых нормальных волн существует волна нулевого порядка. Для нее волновой фронт плоский и совпадает с поперечным сечением слоя, а фазовая скорость не зависит от частоты и равна скорости распространения волн в свободном пространстве. Волна нулевого порядка не характерна для волноводного распространения. Особенностями волноводного распространения для волновода с жесткими стенками обладают нормальные волны более высоких порядков ($m > 0$). Для этих волн характерно наличие дисперсии скорости распространения и то, что поверхность равной фазы не плоская, а имеет волнистую форму, которая при распространении волны не изменяется.

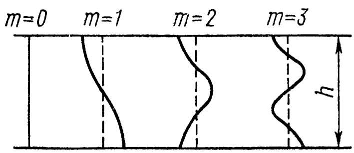

Рис. VI.1.1

Если колебания в волноводе возбуждаются с частотой ω, то в нем возможно одновременное существование нормальных волн всех порядков, для которых критические частоты меньше частоты возбуждения, включая нормальную волну нулевого порядка. Нормальные волны, у которых критическая частота ω_m больше, чем частота возбуждения, не могут распространяться вдоль слоя: для них фазовая скорость и волновое число распространения — мнимые величины:

$$\tilde{c}_m = jc\left[\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{-1/2}, \quad \tilde{k}_{m\,(x)} = -j\left[\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\frac{\omega}{c}.$$

Это значит что вместо бегущих волн высшего порядка в волноводе существуют неоднородные стоячие колебания с амплитудой, быстро уменьшающейся с увеличением расстояния x:

$$\tilde{\Phi}_m = \dot{A}_m \cos\frac{m\pi}{h} z e^{j(\omega t + j\varkappa_m x)} = A_m \cos\frac{m\pi}{h} z e^{-\varkappa_m x} e^{j\omega t},$$

где $\varkappa_m = \left[\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - 1\right]^{1/2}\frac{\omega}{c}$.

Идеальный волновод с граничными поверхностями, одна из которых жесткая (например, скальное дно моря), а другая абсолютно податливая (например, поверхность моря), подчиняется иному дисперсионному уравнению, чем плоский слой с жесткими стенками, а именно: на основании граничных условий для указанных границ $p=\rho\frac{\partial\Phi}{\partial t}=j\rho\omega\Phi\Big|_{z=0}=0$; $\dot{\xi}_z=-\frac{\partial\Phi}{\partial z}\Big|_{z=h}=0$ нетрудно получить дисперсионное уравнение вида $\cos k_z h=0$. Его решениями будут следующие значения волновых чисел: $k_{z\,(m)}=\frac{2m+1}{2h}\pi$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ldots)$.

Формула нормальной волны m-го порядка в этом случае

$$\Phi_m=A_m\cos\left(\frac{2m+1}{2h}z\right)e^{j\omega\left(t-\tau_m x/c\right)},$$

где $\tau_m=\left\{1-\left[\frac{(2m+1)\pi c}{2h\omega}\right]^2\right\}^{1/2}$.

На рис. IV.1.2 показаны поперечные резонансы волн давления в слое жидкости с плоским дном и свободной поверхностью. Примечательно то, что в отличие от слоя с жесткими стенками здесь все нормальные волны, включая и волну нулевого порядка, содержат дисперсию скорости и все другие особенности волноводного распространения.

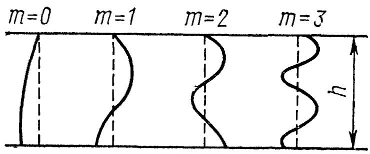

Рис. VI.1.2

Аналогия с дифракционной решеткой. Возвращаясь к решению задачи о распространении нормальных волн в жидком слое с жесткими стенками в формуле (VI.1.5) и записывая потенциал скорости в виде

$$\Phi=Ae^{j\left[\omega t-\left(k_x^{\mathrm{I}}x+k_z^{\mathrm{I}}z\right)\right]}+Be^{j\left[\omega t-\left(k_x^{\mathrm{II}}x-k_z^{\mathrm{II}}z\right)\right]},\qquad(\mathrm{VI.1.15})$$

замечаем, что волны в слое можно рассматривать как результат суперпозиции плоских волн, распространяющихся по направлениям, образующим с осью X острые углы θ и $\frac{\pi}{2}-\theta$. При этом компоненты волнового вектора этих волн таковы:

$$k_x^{\mathrm{I}}=k\sin\theta,\qquad k_x^{\mathrm{II}}=k\sin\theta,$$
$$k_z^{\mathrm{I}}=k\cos\theta,\qquad k_z^{\mathrm{II}}=-k\cos\theta,$$

где θ — угол, между направлениями нормали к верхней поверхности и волнового вектора плоской волны (рис. VI.1.3).

Волны, изображенные на рис. VI.1.3, обозначены $I-I$, $II-II$. Они определяются волновыми векторами $\mathbf{k}_{\mathrm{I}}$ и $\mathbf{k}_{\mathrm{II}}$. Запишем каждую из них в виде комплексных функций:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathrm{I}}&=Ae^{j[\omega t-(\mathbf{k}_{\mathrm{I}}\mathbf{r})]}=Ae^{j[\omega t-(kx\sin\theta+kz\cos\theta)]},\\ \Phi_{\mathrm{II}}&=Be^{j[\omega t-(\mathbf{k}_{\mathrm{II}}\mathbf{r})]}=Be^{j[\omega t-kx\sin\theta-kz\cos\theta)]}.\end{aligned}\qquad(\mathrm{VI.1.16})$$

Сравнивая с формулами первой и второй волн по (VI.1.15), найдем:

$$k_x=k\sin\theta=\frac{\omega}{c}\sin\theta,\qquad k_z=k\cos\theta=\frac{\omega}{c}\cos\theta.\qquad(\mathrm{VI.1.17})$$

Таким образом, волновые числа k_x и k_z являются проекциями $\mathbf{k}$ на координатные оси X и Z.

Но на основании дисперсионного уравнения волновое число k_z в данном идеальном волноводе может принимать только дискретный ряд значений $k_{z(m)} = m\pi/h$. Отсюда следует, что углы θ, под которыми могут распространяться в волноводе плоские волны, имеют дискретные значения:

$$\cos\theta_m = \frac{c}{\omega}\frac{m\pi}{h}.$$

Заменяя c/ω его выражением через длину волны $\lambda/2\pi$, получим

$$2h\cos\theta_m = m\lambda. \tag{VI.1.18}$$

Это выражение напоминает формулу Брэгга для дифракционной решетки с постоянной $2h$. В данном случае θ_m дает направление m-го порядка, под которым звуковые волны от цепочки точечных источников дают максимум интерференционной картины; $2h$ — расстояние между источниками при толщине слоя h. Сами же источники можно вообразить как вторичные, возникающие после многократного отражения лучей, идущих от источника звуковых волн, расположенного между границами слоя.

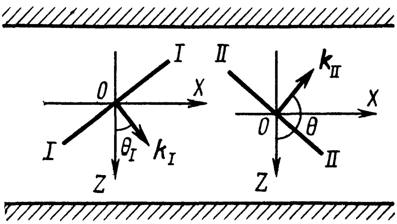

Рис. VI.1.3

Согласно (VI.1.17), k_x является проекцией волнового вектора свободной плоской волны на ось X, поэтому характеристические направления θ_m можно определить формулой

$$\sin\theta_m = \frac{k_x}{k} = \frac{c}{c_m}, \tag{VI.1.19}$$

откуда

$$c_m = \frac{c}{\sin\theta_m}. \tag{VI.1.20}$$

Из этого следует, что фазовая скорость c_m есть, по существу, фазовая скорость волнового следа для горизонтального направления распространения свободных волн, разрешенных дисперсионным уравнением. Эти рассуждения показывают, что дисперсия в идеальных волноводах определяется геометрическими свойствами волновода и не зависит от молекулярных и термодинамических свойств вещества.

Групповая скорость. Практически волновое распространение сигналов и энергии никогда не происходит с помощью чистой гармонической волны. Реальные сигналы имеют более или менее сложную форму. Однако волну любой формы можно разложить в спектр по гармоническим составляющим, в частности для волноводов этими составляющими являются нормальные волны. Поскольку в волноводах наблюдается дисперсия скорости, то отдельные составляющие, имеющие различные частоты, будут распространяться каждая со своей фазовой скоростью. В результате форма сложного сигнала будет искажаться. В этом случае понятие фазовой скорости для всей совокупности волн неприменимо и должно быть заменено другим.

В связи с этим для волн различной сложной формы часто используют такие понятия, как скорость распространения переднего фронта, скорость распространения сигнала, скорость распространения энергии, групповая скорость и др.

Ко многим типам волн применимо понятие групповой скорости. Приближенно она характеризует распространение возмущений в линейной среде, представляющее собой волну с достаточно медленными отклонениями от монохроматичности, и равна скорости перемещения в пространстве огибающей всех гармонических составляющих волн. Это значит, что понятие групповой скорости имеет смысл только для волн, когда амплитуда настолько плавно изменяется в пространстве и со временем, что можно говорить об определенной огибающей. Эти волны можно представить как суперпозицию нескольких волн близких частот. В зависимости от соотношения между фазами отдельных составляющих в каждой точке пространства наблюдается в данный момент времени то или иное значение результирующей амплитуды. В тех местах, где фазы совпадают, получается максимум амплитуды; в точках же, где имеются колебания противоположных фаз, наблюдаются минимумы или нули амплитуды результирующей волны (рис. VI.1.4). Положение максимума амплитуды такой группы волн называют *центром группы*. С течением времени соотношение между фазами колебаний в точке, где находился центр группы волн, изменится и он переместится в пространстве с некоторой скоростью, совпадающей со скоростью u перемещения огибающей. Для нахождения связи между групповой и фазовой скоростями в диспергирующей среде заметим, что в центре группы совпадают фазы колебаний различных, но близких по частоте отдельных волн. Поэтому фаза колебаний в центре группы не зависит от частоты и длины волны, т. е. для узкой полосы частот является практически постоянной:

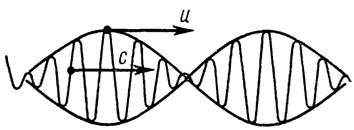

Рис. VI.1.4

$$\varphi = 2\pi\left(\frac{ct}{\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right) = \text{const},$$

где λ — длина волны, изменяющаяся в пределах полосы частот, составляющей данную группу волн.

Из условия постоянства фазы вблизи центра группы волн следует, что производная по длине волны равна нулю:

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = 2\pi\left[t\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{\lambda}\right) + \frac{x}{\lambda^2}\right] = 0,$$

а координата центра группы волн перемещается в пространстве по закону

$$x_0 = -\lambda^2\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{\lambda}\right)t = ut.$$

Скорость перемещения центра группы волн, т. е. групповая скорость, равна

$$u = -\lambda^2 \frac{d}{d\lambda}\left(\frac{c}{\lambda}\right) = c - \lambda \frac{dc}{d\lambda}. \qquad (VI.1.21)$$

Заменив в этом выражении λ на $2\pi/k$ и c на ω/k, получим

$$u = c + k\frac{dc}{dk} = \frac{d}{dk}(ck) = \frac{d\omega}{dk}. \qquad (VI.1.22)$$

Если имеется сигнал, образующий сплошной спектр частот, то его можно представить вблизи средней частоты ω_0 интегралом Фурье

$$\Phi(\omega_0, x) = \int\limits_{\omega_0-\delta\omega}^{\omega_0+\delta\omega} G(\omega)\, e^{j(\omega t - k_x x)},$$

который для узкополосного сигнала описывает последовательность групп волн с различными амплитудами (рис. VI.1.5). По мере распространения сигнала фаза волны изменяется: $d\varphi = \omega\, dt - k_x dx$. Очевидно, что из точки на огибающей, составляющей местоположение центра группы волн, это изменение фазы при небольших изменениях ω и k_x постоянно и приращение φ равно нулю: $d(d\varphi) = d\omega\, dt - dk_x\, dx$. Отсюда следует, что скорость перемещения огибающей группы волн, т. е. групповая скорость равна u [см. (VI.1.22)].

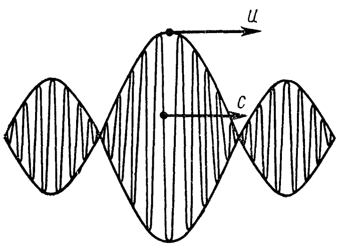

Рис. VI.1.5

Формула (VI.1.21) показывает, что при условии, когда дисперсии нет ($dc/d\lambda = 0$), групповая и фазовая скорости совпадают.

Энергия волны пропорциональна квадрату амплитуды волны. Отсюда следует, что в месте, где расположен центр группы волн, сосредоточена энергия волны и она распространяется в пространстве вместе с максимумом амплитуды огибающей, т. е. с групповой скоростью.

Итак, при наличии дисперсии энергия волны, сосредоточенная вблизи средней полосы частот, распространяется в пространстве с групповой скоростью u, в то время как фазы отдельных гармонических составляющих распространяются с фазовыми скоростями c. Это налагает на групповую скорость определенные физические ограничения, а именно: она не может быть больше скорости света. Для фазовой скорости этого ограничения нет. Она может быть больше групповой, как это имеет место в идеальных волноводах постоянного сечения. Иногда фазовая скорость имеет обратное направление по сравнению с групповой. Это случаи так называемых обратных волн в различных волноводах.

Найдем формулу групповой скорости для идеального плоского волновода с жесткими стенками. Для этого проведем дифференцирование соотношения между волновыми числами (VI.1.4) и получим

$$2k_z \frac{dk_z}{d\omega} = 2k\frac{dk}{d\omega} - 2k_x \frac{dk_x}{d\omega};$$

так как k_z от частоты не зависит ($dk_z/d\omega = 0$), то

$$\frac{d\omega}{dk_x} = u = \frac{d\omega}{dk}\frac{k_x}{k} = c\sin\theta_m. \tag{VI.1.23}$$

Учитывая (VI.1.19), получим

$$u_m = c\sqrt{1-\left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}. \tag{VI.1.24}$$

На рис. VI.1.6 * показана зависимость фазовой и групповой скоростей от частоты для первых нормальных волн плоского жидкого волновода с жесткими стенками. При увеличении частоты фазовая скорость каждой нормальной волны монотонно убывает до скорости свободных волн в среде, а групповая возрастает от значений, близких к нулю, которые она имеет вблизи критических частот, до c. Горизонтальная линия соответствует скорости нормальной волны нулевого порядка.

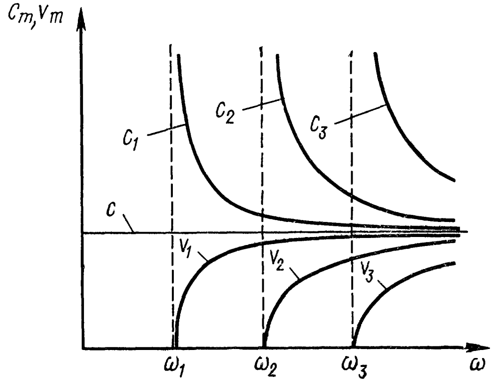

Рис. VI.1,6

§ VI.2. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ТРУБАХ

Задачу о распространении упругих волн в трубах во многих случаях сводят к решению волнового уравнения при условии, что искомые функции должны удовлетворять граничным условиям и условию затухания при увеличении одной линейной координаты до бесконечности. Обычно решение удается провести полностью для случаев простейших граничных условий и когда контуры поперечного сечения труб могут быть совмещены с координатными линиями ортогональной системы.

Остановимся на решении задач о распространении волн в трубах прямоугольного и круглого сечений.

Волны в трубах прямоугольного сечения. Используем прямоугольную систему координат. Расположим ось Z по направлению одного из ребер трубы, а плоскость XOY совместим с плоскостью поперечного сечения. Предположим, что труба имеет абсолютно жесткие стенки. Тогда в качестве граничных условий для потенциала скорости $\Phi(x, y, z, t)$ имеем выражения:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0. \tag{VI.2.1}$$

Для гармонических колебаний $\Phi = \psi(x, y, z)\, e^{j\omega t}$ из волнового уравнения следует, что функция $\psi(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0. \tag{VI.2.2}$$

---

* На рис. VI.1. 6 групповая скорость обозначена V_m.