так как k_z от частоты не зависит ($dk_z/d\omega = 0$), то

$$\frac{d\omega}{dk_x} = u = \frac{d\omega}{dk}\frac{k_x}{k} = c \sin\theta_m. \qquad \text{(VI.1.23)}$$

Учитывая (VI.1.19), получим

$$u_m = c\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2}. \qquad \text{(VI.1.24)}$$

На рис. VI.1.6 * показана зависимость фазовой и групповой скоростей от частоты для первых нормальных волн плоского жидкого волновода с жесткими стенками. При увеличении частоты фазовая скорость каждой нормальной волны монотонно убывает до скорости свободных волн в среде, а групповая возрастает от значений, близких к нулю, которые она имеет вблизи критических частот, до c. Горизонтальная линия соответствует скорости нормальной волны нулевого порядка.

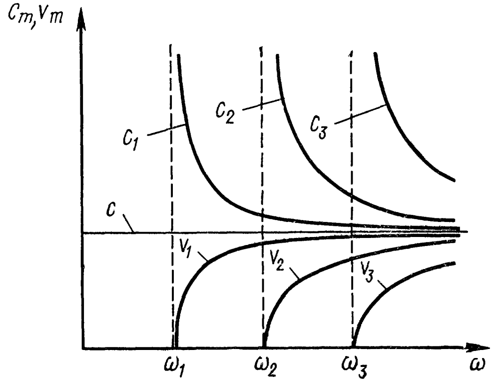

Рис. VI.1,6

§ VI.2. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ТРУБАХ

Задачу о распространении упругих волн в трубах во многих случаях сводят к решению волнового уравнения при условии, что искомые функции должны удовлетворять граничным условиям и условию затухания при увеличении одной линейной координаты до бесконечности. Обычно решение удается провести полностью для случаев простейших граничных условий и когда контуры поперечного сечения труб могут быть совмещены с координатными линиями ортогональной системы.

Остановимся на решении задач о распространении волн в трубах прямоугольного и круглого сечений.

Волны в трубах прямоугольного сечения. Используем прямоугольную систему координат. Расположим ось Z по направлению одного из ребер трубы, а плоскость XOY совместим с плоскостью поперечного сечения. Предположим, что труба имеет абсолютно жесткие стенки. Тогда в качестве граничных условий для потенциала скорости $\Phi(x, y, z, t)$ имеем выражения:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0, \quad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right|_{\substack{y=0\\y=b}} = 0. \qquad \text{(VI.2.1)}$$

Для гармонических колебаний $\Phi = \psi(x, y, z)\, e^{j\omega t}$ из волнового уравнения следует, что функция $\psi(x, y, z)$ должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0. \qquad \text{(VI.2.2)}$$

---

* На рис. VI.1. 6 групповая скорость обозначена V_m.

Подставляя решение в виде $\psi(x, y, z) = \varphi(x, y)\, e^{-j\gamma z}$, найдем, что амплитудная функция $\varphi(x, y)$ пропорциональна произведению гармонических функций:

$$\varphi(x, y) \sim \cos(k_x x - \alpha_x) \cos(k_y y - \alpha_y),$$

где волновые числа k_x, k_y, γ, ω/c удовлетворяют соотношению

$$\omega^2/c^2 = k_x^2 + k_y^2 + \gamma^2.$$

Для нахождения допустимых значений α_x, α_y, k_x, k_y воспользуемся граничными условиями (VI.2.1) при $x=0$ и $y=0$. Это дает значения фаз $\alpha_x = \alpha_y = \pi$. Граничные условия при $x=a$ и $x=b$ образуют дисперсионные уравнения:

$$\mathrm{sim}\, k_x a = 0, \ \mathrm{sim}\, k_y b = 0.$$

Их решениями являются спектры допустимых значений волновых чисел:

$$k_{x(m)} = \frac{m\pi}{a}, \quad k_{y(n)} = \frac{n\pi}{b} \quad (m=0, 1, 2, \ldots; \ n=0, 1, 2, \ldots).$$

Таким образом, собственные функции, описывающие распространение гармонических волн в трубе прямоугольного сечения, имеют следующий вид:

$$\Phi_{mn} = A_{mn} \cos\frac{m\pi}{a} x \cos\frac{n\pi}{b} y e^{j\omega(t - \tau_{mn} t/c)}, \qquad \text{(VI.2.3)}$$

где $\tau_{mn} = \left[1 - \left(\frac{m\pi c}{a\omega}\right)^2 - \left(\frac{n\pi c}{b\omega}\right)^2\right]^{1/2} = \left[1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$; $\omega_m = \frac{m\pi c}{a}$ и $\omega_n = \frac{n\pi c}{b}$ — критические частоты.

Эти формулы показывают, что в широких прямоугольных трубах может распространяться дискретный набор нормальных волн. Для всех номеров нормальных волн, кроме $m=0$ и $n=0$, фазовая скорость с увеличением частоты уменьшается:

$$c_m = c\left[1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2},$$

а групповая, наоборот, растет: $u_{mn} = c\left[1 - \left(\frac{\omega_m}{\omega}\right)^2 - \left(\frac{\omega_n}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}$.

Если в волноводе возбуждается частота, совпадающая с одной из критических, например $\omega = \omega_m$, то фазовая скорость оказывается мнимой $c_{mn} = +jc\,\omega_m/\omega_n$; мнимым будет также и волновое число $\gamma_{mn} = -j\omega_n/c$. В этом случае вместо бегущих волн будет наблюдаться колебательный процесс с амплитудой, убывающей с увеличением расстояния z по экспоненциальному закону.

Если частота возбуждаемых колебаний меньше, чем наименьшая критическая частота, например $\omega < \pi c/b$ при $a < b$, то в волноводе будет распространяться плоская волна, амплитуда которой не зависит от координат точек поперечного сечения трубы, а фазовая скорость не зависит от частоты. Условие распространения плоской волны в трубе прямоугольного сечения сводится к неравенству

$$b < \frac{\pi c}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi}\lambda = \frac{\lambda}{2}, \tag{VI.2.4}$$

где b — наибольшая ширина трубы.

Если частота возбуждения меньше критической, то в трубе установятся колебания с неоднородной амплитудой, уменьшающейся с увеличением z по экспоненциальному закону. Для частоты большей, чем критическая, наряду с неоднородными колебаниями могут наблюдаться нормальные волны низших порядков, вплоть до нулевого включительно.

Труба с круглым сечением. Для изучения законов распространения упругих волн в круглых широких трубах целесообразно использовать цилиндрическую систему координат, где волновое уравнение имеет вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} = 0. \tag{VI.2.5}$$

Его решение должно представляться конечными и дифференцируемыми функциями координат для области $0 \leqslant r \leqslant a$; $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$; $-\infty \leqslant z \leqslant +\infty$. Причем для жесткой трубы эти функции должны удовлетворять условию исчезновения радиальной составляющей скорости на поверхности трубы, т. е.

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right|_{r=a} = 0. \tag{VI.2.6}$$

Для установившихся гармонических колебаний представим потенциал скорости $\Phi(r, z, \varphi, t)$ в виде

$$\Phi = \psi(r, \varphi, z)\, e^{j\omega t}$$

и после подстановки в волновое уравнение получим уравнение Гельмгольца относительно амплитудной части $\psi(r, \varphi, z)$ в цилиндрических координатах:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial \psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0. \tag{VI.2.7}$$

Если искомую функцию представить в виде

$$\psi(r, \varphi, z) = R(r)\, X(\varphi)\, Z(z),$$

то уравнение Гельмгольца расщепляется на три обыкновенных дифференциальных уравнения второго порядка относительно функций R, X, Z:

$$\frac{d^2X}{d\varphi^2} + m^2 X = 0, \tag{VI.2.8}$$

$$\frac{d^2Z}{dz^2} + \gamma^2 Z = 0, \tag{VI.2.9}$$

$$\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(k_r^2 - \frac{m^2}{r^2}\right)R = 0, \tag{VI.2.10}$$

где

$$k_r^2 + \gamma^2 = \omega^2/c^2;\ m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ \infty. \tag{VI.2.11}$$

Первое из этих уравнений имеет решения в виде гармонических функций $\sin m\varphi$ и $\cos m\varphi$ при целочисленных значениях параметра m; второе ищем в виде $Z = A\mathrm{e}^{-j\gamma z} + B\mathrm{e}^{j\gamma z}$. Оно представляет собой сумму двух волновых функций, соответствующих волнам, распространяющимся по направлению оси Z трубы навстречу друг другу. Ради упрощения ограничимся только слагаемым $A\mathrm{e}^{-j\gamma z}$, отвечающим распространению в сторону положительных значений Z. Что касается уравнения (VI.2.10), то его при целочисленных значениях параметра m можно привести к уравнению Бесселя m-го порядка относительно переменной $x = k_r r$. Частное решение этого уравнения, как известно, есть сумма, содержащая функции Бесселя и Неймана m-го порядка. Но поскольку функция Неймана при $z = 0$ равна $-\infty$, то второе слагаемое отбрасываем, как не отвечающее условию конечности функции $\Phi(r, \varphi, z, t)$. В итоге приходим к выводу, что все возможные типы волн в трубах круглого сечения могут описываться следующими волновыми функциями:

$$\Phi_m(r, \varphi, z, t) = A_m \mathcal{J}_m(k_r r) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} m\varphi \mathrm{e}^{j(\omega t - \gamma z)}. \qquad \text{(VI.2.12)}$$

Используя (VI.2.7), получим дисперсионное уравнение

$$\left.\frac{d\mathcal{J}_m(x)}{dx}\right|_{x = k_r a} = 0. \qquad \text{(VI.2.13)}$$

Его корни представлены в табл. VI.5.2.

Заметим, что если бы потребовалось найти решение задачи о распространении нормальных волн в трубе с абсолютно податливыми стенками, то вместо (VI.2.7) действовало бы условие, по которому на поверхности трубы давление равно нулю: $\Phi(r, \varphi, z, t)|_{r=a} = 0$. В этом случае дисперсионное уравнение имело бы вид

$$\mathcal{J}_m(x)|_{x = k_r a} = 0. \qquad \text{(VI.2.14)}$$

Для справок в табл. VI.5.1 приведены корни этого уравнения.

Обозначая корни дисперсионного уравнения (VI.2.13) как $\pi\alpha_{mn}$, находим дискретный спектр волновых чисел k_r:

$$k_{mn} = \frac{\pi\alpha_{mn}}{b}. \qquad \text{(VI.2.15)}$$

Волновые числа распространения имеют дискретные значения и зависят от частоты:

$$\gamma_{mn}^2 = \frac{\omega^2}{c^2} - k_{mn}^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\tau_{mn}^2, \qquad \text{(VI.2.16)}$$

где

$$\tau_{mn}^2 = 1 - \left(\frac{\pi\alpha_{mn}}{a\omega} c\right)^2. \qquad \text{(VI.2.17)}$$

Нетрудно получить формулу фазовой скорости нормальных волн mn-го порядков. Эта величина равна отношению частоты ω к волновому числу γ_{mn}. Пользуясь (VI.2.16), получаем $c_{mn} = \omega/\gamma_{mn} = c/\tau_{mn}$, или

$$c_{mn} = c\left[1-\left(\frac{\omega_{mn}}{\omega}\right)^2\right]^{-1/2}, \qquad \text{(VI.2.18)}$$

где $\omega_{mn} = \pi\alpha_{mn}c/a$ — критические частоты нормальной волны.

Отсюда следует, что фазовая скорость зависит от частоты и определяется размерами трубы.

Таким образом, возможные нормальные волны в круглых трубах выражаются следующими волновыми функциями:

$$\Phi_{mn} = A_{mn}\mathscr{J}_m\left(\pi\alpha_{mn}\frac{r}{a}\right)\frac{\cos}{\sin}m\varphi e^{j\omega(t-\tau_{mn}z/c)}. \qquad \text{(VI.2.19)}$$

Каждой критической частоте с $m=0$ соответствует своя волновая функция, описывающая нормальные волны с волновыми фронтами, модулированными по радиусу r:

$$\Phi_{0n} = A_{0n}\mathscr{J}_0\left(\pi\alpha_{0n}\frac{r}{a}\right)e^{j\omega(t-\tau_{0n}z/c)}.$$

Для критических частот ω_{mn} $(m \neq 0)$ волновые функции зависят не только от r, но и от угла φ. При этом одному значению критической частоты отвечают две волновые функции. Одна из них пропорциональна $\cos m\varphi$ и описывает симметричные относительно диаметра колебания:

$$\Phi_{mn(s)} = A_{mn(s)}\cos m\varphi\mathscr{J}_{mn}\left(\pi\alpha_{mn}\frac{r}{a}\right)e^{j\omega(t-\tau_{mn}z/c)},$$

а другая пропорциональна $\sin m\varphi$. Она описывает колебания антисимметричные:

$$\Phi_{mn(a)} = A_{mn(a)}\sin m\varphi\mathscr{J}_{mn}\left(\pi\alpha_{mn}\frac{r}{a}\right)e^{j\omega(t-\tau_{mn}z/c)}.$$

В цилиндрической трубе определенного радиуса в зависимости от возбуждения могут существовать различные формы нормальных волн. Если частота колебаний меньше наинизшей критической, то в трубе могут существовать бегущие плоские волны, которые распространяются с фазовой скоростью c, не зависящей от частоты. Труба по отношению к этим волнам считается узкой. На основании неравенства $\omega < \omega_{01}$ нетрудно получить критерий узкой трубы. Для этого достаточно записать выражение для критической частоты $\omega_{01} = \pi\alpha_{01}c/a$ и решить неравенство относительно радиуса трубы a. В результате получаем критерий распространения в круглой трубе чистой плоской волны: $a < \alpha_{01}\lambda/2$. Подставляя $\alpha_{01} \approx 1{,}21$ (см. табл. VI.5.2), находим $a < 0{,}61\lambda$.

Если частота возбуждения удовлетворяет неравенству $\omega_{01} < \omega < \omega_{02}$, то в трубе могут возбуждаться нормальные волны нулевого порядка (они распространяются без дисперсии) и нормальные волны 01-го порядка. Фазовая скорость этих волн зависит от частоты:

$$c_{01} = c\left[1-\left(\frac{\pi\alpha_{01}}{a\omega}c\right)^2\right]^{1/2} = c\left[1-\left(\frac{\omega_{01}}{\omega}\right)^2\right]^{1/2}.$$

В общем случае, когда частота возбуждения больше, чем критическая ω_{mn}, в трубе могут возбудиться нормальные волны с критическими частотами порядка меньшего, чем mn.

Из всех возможных нормальных волн в трубах возбуждаются не все. Подобно тому, как способ возбуждения определяет реализацию тех или иных допустимых мод колебаний струны, реализация тех или нормальных волн в трубах определяется способом введения в упругую среду, заполняющую трубу, акустических колебаний.

§ VI.3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА В ТРУБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В трубах прямоугольного сечения могут распространяться различные нормальные волны, разрешенные дисперсионными уравнениями труб. Покажем, что в зависимости от способа возбуждения реализуются только некоторые из возможных нормальных волн.

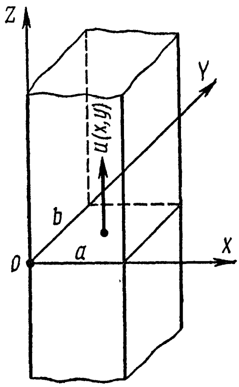

Рис. VI.3.1

Предположим, что на одном конце прямоугольной трубы имеется излучатель (мембрана, пластина или слой воздуха), колеблющийся под действием внешней силы так, что нормальная колебательная скорость его поверхности определяется некоторой комплексной функцией от координат x, y и времени t. Допустим, что режим колебаний установившийся:

$$u_n = u_0(x,\ y)\, e^{-j\varphi(xy)} e^{j\omega t},$$

где $\omega = 2\pi f$; f — частота вынуждающей силы.

Предположим, что труба прямоугольного сечения имеет жесткие стенки и заполнена идеальной жидкостью или воздухом. Расположим оси координат, как показано на рис. VI.3.1. Здесь a и b — размеры поперечного сечения трубы.

Для определения движения газа в такой трубе необходимо найти решение амплитудного уравнения в прямоугольных координатах:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0, \tag{VI.3.1}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\ x=a}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{\substack{y=2\\ y=b}} = 0, \tag{VI.3.2}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} v_0(x,\ y)\, e^{j\varphi(xy)} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b, \\ 0 & \text{при } a < x < \infty,\ b < y < \infty, \end{cases}$$

где $u_0(x,\ y)$ — колебательная скорость в сечении XYO.

Кроме того, решение должно удовлетворять условию излучения в направлении оси Z. Применяя метод расщепления уравнения, полу-