В общем случае, когда частота возбуждения больше, чем критическая ω_{mn}, в трубе могут возбудиться нормальные волны с критическими частотами порядка меньшего, чем mn.

Из всех возможных нормальных волн в трубах возбуждаются не все. Подобно тому, как способ возбуждения определяет реализацию тех или иных допустимых мод колебаний струны, реализация тех или нормальных волн в трубах определяется способом введения в упругую среду, заполняющую трубу, акустических колебаний.

§ VI.3. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗВУКА В ТРУБЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ

В трубах прямоугольного сечения могут распространяться различные нормальные волны, разрешенные дисперсионными уравнениями труб. Покажем, что в зависимости от способа возбуждения реализуются только некоторые из возможных нормальных волн.

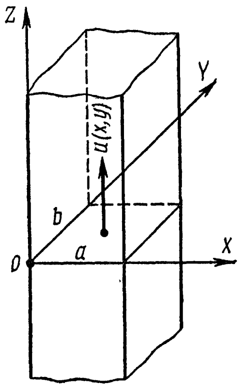

Рис. VI.3.1

Предположим, что на одном конце прямоугольной трубы имеется излучатель (мембрана, пластина или слой воздуха), колеблющийся под действием внешней силы так, что нормальная колебательная скорость его поверхности определяется некоторой комплексной функцией от координат x, y и времени t. Допустим, что режим колебаний установившийся:

$$u_n = u_0(x,\ y)\, e^{-j\varphi(xy)} e^{j\omega t},$$

где $\omega = 2\pi f$; f — частота вынуждающей силы.

Предположим, что труба прямоугольного сечения имеет жесткие стенки и заполнена идеальной жидкостью или воздухом. Расположим оси координат, как показано на рис. VI.3.1. Здесь a и b — размеры поперечного сечения трубы.

Для определения движения газа в такой трубе необходимо найти решение амплитудного уравнения в прямоугольных координатах:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \psi = 0, \qquad \text{(VI.3.1)}$$

удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial x}\right|_{\substack{x=0\\x=a}} = 0, \qquad \left.\frac{\partial\psi}{\partial y}\right|_{\substack{y=2\\y=b}} = 0, \qquad \text{(VI.3.2)}$$

$$\left.\frac{\partial\psi}{\partial z}\right|_{z=0} = \begin{cases} v_0(x,\ y)\, e^{j\varphi(xy)} & \text{при } 0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b, \\ 0 & \text{при } a < x < \infty,\ b < y < \infty, \end{cases}$$

где $u_0(x,\ y)$ — колебательная скорость в сечении XYO.

Кроме того, решение должно удовлетворять условию излучения в направлении оси Z. Применяя метод расщепления уравнения, получаем общее решение:

$$\Psi(x,\ y,\ z)=\sum_m\sum_n A_{mn}\cos(k_m x)\cos(k_n y)\,e^{-jk_p z}. \qquad \text{(VI.3.3)}$$

Между числами k_m, k_n и k_p существует связь:

$$k^2=k_m^2+k_n^2+k_p^2,$$

где $k=\omega/c$; $k_m=\pi m/a$; $k_n=\pi n/b$.

Отсюда следует, что волновое число k_p не может быть произвольным, оно зависит от значений k, k_m и k_n согласно формуле

$$k_p=k\sqrt{1-\frac{k_m^2+k_n^2}{k^2}}.$$

В дальнейшем будем применять для волнового числа k_p обозначение k_{mn}.

Подставляя в (VI.3.2) двойной ряд (VI.3.3) и положив после дифференцирования $z=0$, получим

$$j\sum_{m,\ n} A_{mn}k_{mn}\cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)=v(x,\ y)\,e^{j\varphi(x,\ y)},$$

или

$$\sum_{m,\ n} A_{mn}k_{mn}\cos\left(\frac{\pi m}{a}x\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)=v(x,\ y)\,e^{j[\varphi(x,\ y)-\pi/2]}. \qquad \text{(VI.3.4)}$$

Формула (VI.3.4) представляет собой разложение функции $v(x,\ y)\,e^{j[\varphi(x,\ y)-\pi/2}$ в двойной ряд Фурье, где $A_{mn}k_{mn}$ — коэффициенты разложения:

$$A_{mn}k_{mn}=\frac{4\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}\int_0^a\int_0^b v(x,\ y)\,e^{j[v(x,\ y)-\pi/2]}\cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)dx\,dy, \qquad \text{(VI.3.5)}$$

где ε_m и ε_n — числа, имеющие значения $\frac{1}{2}$, если $m,\ n=0$, и 1, если m и n не равны нулю.

Рассмотрим частные случаи.

Основная волна. Наиболее простой результат получается, когда у основания трубы возбуждаются колебания с одинаковой амплитудой и фазой во всем сечении $z=0$, т. е. $v(x,\ y)\,e^{j\varphi(x,\ y)}=v_0$. В этом случае

$$A_{mn}k_{mn}=\frac{4\varepsilon_m\varepsilon_n v_0}{ab}\int_0^a\int_0^b\cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dx\,dy=4\varepsilon_m\varepsilon_n v_0\frac{\sin m\pi}{m\pi}\frac{\sin n\pi}{n\pi}=$$

$$=\begin{cases}0 \text{ п и } m,\ n\neq 0,\\ v_0 \text{ при } m=0;\ n=0.\end{cases}$$

Отсюда следует, что когда m или n не равны нулю, то $A_{mn}=0$. Таким образом, поршень, полностью перекрывающий сечение трубы, создает в нем независимо от частоты колебаний одну плоскую волну. В этом случае из всех членов двойной суммы (VI.3.3) остается лишь $A_{00}\,e^{-jk_{00}z}$, причем $A_{00}=\frac{v_0}{k_{00}}=\frac{v_0 c}{2\pi f}$, $k_{00}=$

$= k = \omega/c$. Следовательно, для основной волны ($m=0$, $n=0$) получены формулы поля:

$$\Psi = \psi_{00} e^{j\omega t} = \frac{v_0 c}{j\omega} e^{j(\omega t - \omega z/c)},$$

$$v = -\frac{\partial \Psi}{\partial z} = v_0 e^{j(\omega t - \omega z/c)}, \qquad \text{(VI.3.6)}$$

$$p = j\omega\Psi = \rho c v_0 e^{j(\omega t - \omega z/c)}.$$

Возбуждение колебаний внутри трубы прямоугольной мембраной. Если в основании трубы натянуть мембрану и возбудить в ней колебания основного тона, то функция, определяющая граничные условия, представляет распределение амплитуды колебаний мембраны:

$$F(x, y) = v_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right).$$

Собственная частота мембраны определяется натяжением и поверхностной плотностью мембраны:

$$f_{\text{н}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\sigma}}\sqrt{\left(\frac{1}{a}\right)^2 + \left(\frac{1}{b}\right)^2},$$

где σ — поверхностная плотность мембраны.

В этом случае

$$A_{mn} = \frac{4\varepsilon_m \varepsilon_n}{k_{mn} ab} \int_0^a \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx \int_0^b \sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) \cos\frac{n\pi y}{b}\, dy.$$

Пользуясь формулой $\cos(nx) = \sum\limits_p (-1)^p \binom{n}{2p} \sin^{2p} x \cos^{n-2p} x$ и табличным интегралом

$$\int_0^x \sin^a t \cos^b t\, dt = \frac{\sin^{a+1} x \cos^{b+1} x}{a+b} + \frac{b-1}{b+1} \int_0^x \sin^a x \cos^{b-2} x\, dx,$$

можно определить все коэффициенты A_{mn}:

$$A_{00} = \frac{4}{ab}\frac{ab}{k_{00}\pi^2} = \frac{4}{\pi k}, \quad A_{01} = A_{10} = 0,$$

$$A_{20} = \frac{8}{3\pi^2 k_{20}}, \quad A_{02} = -\frac{8}{3\pi^2 k_{02}}, \quad A_{12} = 0,$$

$$A_{21} = \frac{16}{9\pi^2 k_2}, \quad A_{23} = A_{32} = A_{34} = A_{43} = 0,$$

$$A_{44} = \frac{10}{225\pi^2 k_{44}}, \quad A_{40} = -\frac{8}{15\pi^2 k_{40}}, \quad A_{04} = -\frac{8}{15\pi^2 k_{04}},$$

где

$$k_{00} = \omega/c = k; \quad k_{20} = \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{a^2}};$$

$$k_{02} = \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{b^2}}; \quad k_{21} = \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{a^2} - \frac{\pi^2}{b^2}};$$

$$k_{02} = \sqrt{k^2 - \frac{4\pi^2}{b^2}}; \quad k_{44} = \sqrt{k^2 - \frac{16\pi^2}{a^2} - \frac{16\pi^2}{b^2}};$$

$$k_{40} = \sqrt{k^2 - \frac{16\pi^2}{a^2}}; \quad k_{04} = \sqrt{k^2 - \frac{16\pi^2}{b^2}}.$$

В этом случае потенциал

$$\psi=\frac{4v_0}{\pi^2 k}e^{-j\omega z/c}-\frac{8v_0 e^{-jk_{20}z}}{3\pi^2\sqrt{k^2-4\pi^2/a^2}}-\frac{8v_0 e^{-jk_{02}z}}{3\pi^2\sqrt{k^2-4\pi^2/b^2}}+$$

$$+\frac{16v_0 e^{-jk_{21}z}}{9\pi^2\sqrt{k^2-4\pi^2/a^2+\pi^2/b^2}}+\ldots,$$

где $k_{mn}=\frac{\omega}{c_{mn}}=\sqrt{k^2-\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2}$.

Назовем слагаемое в потенциале скорости, содержащее индексы m и n, mn-волной. Для некоторых значений m и n волновое число $k_{mn}=0$. Эту моду называют *критической*. Для критической моды выполняется условие

$$\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)=\frac{\omega^2}{c^2}=\left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2. \tag{VI.3.7}$$

Если числа m и n таковы, что

$$\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)<k^2=\left(\frac{2\pi f}{c}\right)^2, \tag{VI.3.8}$$

то k_{mn} — действительное число. Волна, соответствующая этому действительному числу, имеет фазу, изменяющуюся пропорционально ω/c_{mn}, и представляет собой бегущую волну с фазовой скоростью

$$c_{mn}=\frac{c}{\sqrt{1-(\pi c/\omega)^2\,(m^2/a^2+n^2/b^2)}}.$$

Волны, для которых выполняется условие $\pi^2\,(m^2/a^2+n^2/b^2)>k^2$, соответствуют мнимым значениям волновых чисел

$$k_{mn}=\sqrt{k^2-\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)}=-j\sqrt{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-k^2\right)}=-j\delta_{mn}.$$

Фазовые множители указанных волн имеют вид

$$e^{-jk_{mn}z}=e^{-j(-j\delta_{mn})}=e^{-\delta_{mn}z},$$

где

$$\delta_{mn}=\sqrt{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)-k^2}. \tag{VI.3.8'}$$

Это стоячие волны, амплитуда которых уменьшается по экспоненте с коэффициентом δ_{mn} (VI.3.8').

Если мембрана занимает всю площадь сечения трубы и колеблется на своей основной частоте, то в трубе может возбуждаться только основная волна. Это можно доказать следующими рассуждениями.

Подставив в условие существования бегущей волны (VI.3.8) вместо f собственную частоту мембраны $f_{\text{рез}}=\frac{c_0}{2}\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{T}{\sigma}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)}$, получим неравенство

$$\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)<\frac{\pi^2}{c^2}\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)c_0^2,$$

или

$$\frac{c^2}{c_0^2}\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)<\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}. \tag{VI.3.9}$$

Отношение скорости звука в газе или жидкости к скорости распространения изгибных колебаний в мембране значительно больше единицы: m и n могут принимать значения 0, 1, 2, ... Поэтому неравенство (VI.3.9) может быть выполнено только для $m=0$ и $n=0$. Отсюда следует, что в данном случае в трубе могут распространяться только плоские продольные волны типа Ψ_{00}. Другие члены ряда имеют мнимые значения $k_{mn}=j\delta_{mn}$; их амплитуды уменьшаются с возрастанием z по экспоненциальному закону. Коэффициент ослабления

$$\delta_{mn}=\sqrt{\pi^2\left(\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}\right)-\frac{4\pi^2fp^2}{c^2}}=\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}-\frac{4fp^2}{c^2}},$$

или

$$\delta_{mn}=\sqrt{\frac{1}{a^2}\left(m^2-\frac{T}{\sigma c^2}\right)-\frac{1}{b^2}\left(n^2-\frac{T}{\sigma c^2}\right)}.$$

Например, при натяжении $T=10^5$ дин/см, поверхностной плотности $\sigma=1$ г/см^2 и скорости звука в воздухе 33 000 см/с, можно считать, что отношение $T/(\sigma c^2)\ll 1$. Поэтому коэффициенты ослабления определяют только параметрами трубы: $\delta_{mn}\approx\pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}$. Все волны такого типа имеют структуру

$$\Psi_{mn}=A_{mn}j\mathrm{e}^{-\delta_{mn}z}\cos\frac{m\pi x}{a}\cos\frac{n\pi y}{b}.$$

Амплитуда этих волн убывает по закону $\mathrm{e}^{-\delta_{mn}z}$, т. е. уменьшается на расстоянии $z=1/\delta_{mn}$ в е раз. Кроме того, по оси X амплитуда обращается в нуль при значениях $x_p/a=\frac{p+1/2}{m}$ $(x_p<a;\ p=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$. Амплитуда по оси Y также обращается в нуль при $y_r/b=(r+1/2)/m$; $y_r<b$; $r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$

Иначе говоря, вблизи мембраны существует система поперечных стоячих волн с узловыми плоскостями, параллельными стенкам канала. Число узловых плоскостей равно m.

Общий случай. Поверхность мембраны имеет амплитудное распределение $F=v(x,\ y)$. Для функции $v(x,\ y)$, более сложной, чем для пульсирующих колебаний или колебаний мембраны на основной частоте, звуковое поле в трубе определяют следующими общими формулами:

$$\Psi=\sum_{m,\,n}\frac{4\varepsilon_m\varepsilon_n}{abjk_{mn}}I_{mn}\cos\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}\mathrm{e}^{-jk_{mn}z},$$

$$v_x=\sum_{m,\,n}\frac{4\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}\frac{\pi m}{a}I_{mn}\sin\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}\mathrm{e}^{-jk_{mn}z},$$

$$v_y=\sum_{m,\,n}\frac{4\varepsilon_m\varepsilon_n}{ab}\frac{\pi n}{ab}I_{mn}\cos\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{b}\mathrm{e}^{-jk_{mn}z},$$

$$p=\sum_{m,\,n}\frac{\omega\rho 4\varepsilon_m\varepsilon_n}{abk_{mn}}I_{mn}\cos\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}\mathrm{e}^{-jk_{mn}z},$$

где

$$\varepsilon_m=\begin{cases}1/2 & \text{при } m=0,\\ 1 & \text{при } m\neq 0;\end{cases}\qquad \varepsilon_n=\begin{cases}1/2 & \text{при } n=0,\\ 1 & \text{при } n\neq 0;\end{cases}$$

$$I_{mn}=\int_0^a\int_0^b v(x,\ y)\cos\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}\,dx\,dy;\quad k_{mn}=\frac{1}{c}\sqrt{\omega^2-\omega_{mn}^2}.$$

Допустим, что источник звука создает внутри канала колебания, у которых частота $\omega=\omega_0=2\pi f_\infty$. Критическая частота, при которой возникают поперечные резонансы [см. (VI.3.7)],

$$\omega_{mn}^{(\text{к})}=\pi c\sqrt{\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}}.$$

Она имеет различные значения в зависимости от номера моды волны: $\omega_{00}^{(к)}=0$ для $mn=00$, $\omega_{10}^{(к)}=\pi ca$ для $mn=10$, $\omega_{11}^{(к)}=\pi c\sqrt{ab/(a+b)}$ для $mn=11$ и т. д. Если частота возбуждаемых колебаний окажется меньше критической для $m'n'$, то в канале будут лишь такие моды бегущих волн, для которых

$$\frac{m^2}{a^2}+\frac{n^2}{b^2}<\left(\frac{m'}{a}\right)^2+\left(\frac{n'}{b}\right)^2.$$

Например, если $\omega_0<\omega_{11}^{(к)}$, то могут быть следующие моды бегущих волн: 00, 01, 10. Высшие моды колебаний образуются в поперечных сечениях волновода в виде стоячих волн с амплитудами колебаний, уменьшающимися с ростом координаты z сечения по экспоненциальному закону.

Для получения координат узловых плоскостей найдем корни уравнения $\cos\frac{\pi mx}{a}\cos\frac{\pi ny}{b}=0$, откуда

$$\frac{x_p}{a}=\frac{p+1/2}{m};\quad \frac{y_l}{b}=\frac{l+1/2}{n},$$

где $1/2+p\leqslant m$; $1/2+l\leqslant n$; n, $m=1, 2, 3, \ldots$; $p=0, 1, 2, \ldots$

Число узловых плоскостей по осям X и Y равно m и n соответственно. Например, для моды 23 число узловых плоскостей по оси X равно двум, а по оси Y — трем; для моды 10 число узловых плоскостей по оси X равно единице, а по оси Y — нулю.

Иногда для описания звукового поля используют понятие удельного акустического импеданса данной точки поля $z_{\mathbf{n}}=\mathbf{n}p/v_{\mathbf{n}}$ ($\mathbf{n}$ — единичный вектор к нормали, построенной к волновому фронту; p — давление; v_n — колебательная скорость по направлению волнового вектора $\mathbf{n}k$). Очевидно, для каждой волны с модой mn можно составить формулу импеданса. Импеданс в направлении оси Z для бегущей волны

$$z_{mn}(z)=\frac{p_{mn}}{v_{mn}}=\frac{\omega\rho}{k_{mn}}=\rho c_{mn}, \tag{VI.3.10}$$

где $c_{mn}=\dfrac{c}{\sqrt{1-(\pi c/\omega)^2(m^2/a^2+n^2/b^2}}$ — фазовая скорость бегущей волны, соответствующей индексам m и n.

Для тех мод колебаний, которые ниже, чем мода, соответствующая критической частоте, скорость c_{mn} — действительное число и импеданс (VI.3.10) содержит только действительную часть $z_{mn}=x_{mn}$, причем $x_{mn}=\dfrac{\rho c}{\sqrt{1-(\omega_{mn}/\omega)^2}}$. Для высших мод

$$c_{m'n'}=\frac{jc}{\sqrt{\pi c\lambda^2/\omega\cdot[(m'/a)^2+(n'/b)^2]-1}},$$

поэтому импеданс содержит только реактивную часть:

$$z_{mn}=jY_{mn},$$

где $Y_{mn}=\dfrac{\rho c}{\sqrt{\left(\omega_{mn}^{(k)}/\omega\right)^2-1}}$ ω_k — критическая частота для моды mn.

Импеданс в случае стоячих волн имеет инерциальный характер; он аналогичен импедансу чистой индуктивности. Поэтому такой волне соответствует некоторая инерциальная нагрузка в форме присоединенной массы, приходящейся на единицу площади поперечного сечения:

$$M_{mn}=\frac{Y_{mn}}{\omega}=\frac{\rho c}{\sqrt{\left(\omega_{mn}^{(k)}\right)^2-\omega^2}}.$$

Импедансы моды mn для направлений распространения волн вдоль осей X и Y выражаются формулами:

$$z_{mn(x)} = j\,\frac{\rho c_x a}{m\pi}\,\mathrm{ctg}\,\frac{m\pi x}{a};$$

$$z_{mn(y)} = j\,\frac{\rho c_y b}{n\pi}\,\mathrm{ctg}\,\frac{mny}{b}.$$

Нетрудно видеть, что на узловых плоскостях (для $\psi_{(x,\,y)}$) импедансы обращаются в нуль.

§ VI.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПУЛЬСИРУЮЩИМ КОЛЬЦОМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КАНАЛ С ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

Рассмотрим, какие виды волнового движения можно ожидать в цилиндрической трубе, если колебания возбуждаются с помсщью пульсирующего кольца, являющегося частью поверхности цилиндра.

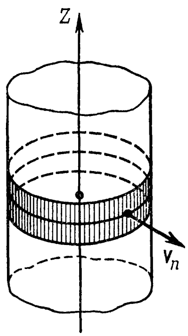

Рис. VI.4.1

Высота кольца $2h$. Расположим систему цилиндрических координат так, чтобы плоскость $z = 0$ проходила посередине высоты пульсирующего кольца (рис. VI.4.1). Колебательная скорость пульсирующего кольца $v_n = v_0 e^{j\omega t}$. Предположим, что другие точки поверхности цилиндра остаются неподвижными. Так как колебания симметричны относительно оси цилиндра, то волны внутри цилиндра не зависят от азимута φ. Постановка задачи в данном случае не отличается от той, которая решена в § II.4, однако необходимо найти звуковое поле внутри цилиндрической трубы.

С математической точки зрения нужно решить уравнение (II.4.4) при граничном условии (II.3.5) и условии излучения $\psi(r,\ z) \xrightarrow[z\to\pm\infty]{} 0$. При проведении интегрального преобразования Фурье получим функцию

$$F(r,\ \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r,\ z)\, e^{j\tau z}\, dz,$$

уравнение (II.4.10) в виде

$$\frac{1}{x}\frac{\partial}{\partial x}\left(x\,\frac{\partial F(x,\ \tau)}{\partial x}\right) + F(x,\ \tau) = 0 \qquad \text{(VI.4.1)}$$

и граничное условие (II.4.11) в виде

$$\nu\,\frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \begin{cases} -\dfrac{2v_0 \sin(\tau h)}{\tau} & \text{при } |z| \leqslant h; \\ 0 & \text{при } |z| \geqslant h, \end{cases} \qquad \text{(VI.4.2)}$$

где $\nu = \sqrt{k^2 - \tau^2}$; $x = \nu r$; $x_0 = \nu a$; $k = \omega/c$ — волновое число; a — радиус цилиндра; c — фазовая скорость в свободном пространстве.

Решением (VI.4.1) является линейная комбинация цилиндрических функций $\mathscr{J}_0(x)$ и $N_0(x)$, но поскольку $F(x,\ t) \neq \infty$ при $x = 0$, то в решение не должны входить функции Неймана.