

Импедансы моды  $mn$  для направлений распространения волн вдоль осей  $X$  и  $Y$  выражаются формулами:

$$z_{mn(x)} = j \frac{\rho c_x a}{m\pi} \operatorname{ctg} \frac{m\pi x}{a};$$

$$z_{mn(y)} = j \frac{\rho c_y b}{n\pi} \operatorname{ctg} \frac{n\pi y}{b}.$$

Нетрудно видеть, что на узловых плоскостях (для  $\psi_{(x,y)}$ ) импедансы обращаются в нуль.

#### § VI.4. ИЗЛУЧЕНИЕ ЗВУКА ПУЛЬСИРУЮЩИМ КОЛЬЦОМ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИЙ КАНАЛ С ЖЕСТКИМИ СТЕНКАМИ

Рассмотрим, какие виды волнового движения можно ожидать в цилиндрической трубе, если колебания возбуждаются с помощью пульсирующего кольца, являющегося частью поверхности цилиндра.

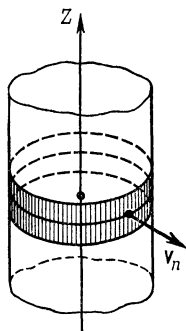


Рис. VI.4.1

Высота кольца  $2h$ . Расположим систему цилиндрических координат так, чтобы плоскость  $z=0$  проходила посередине высоты пульсирующего кольца (рис. VI.4.1). Колебательная скорость пульсирующего кольца  $v_n = v_0 e^{j\omega t}$ . Предположим, что другие точки поверхности цилиндра остаются неподвижными. Так как колебания симметричны относительно оси цилиндра, то волны внутри цилиндра не зависят от азимута  $\varphi$ . Постановка задачи в данном случае не отличается от той, которая решена в § II.4, однако необходимо найти звуковое поле внутри цилиндрической трубы.

С математической точки зрения нужно решить уравнение (II.4.4) при граничном условии (II.3.5) и условии излучения  $\psi(r, z) \xrightarrow{z \rightarrow \pm\infty} 0$ . При проведении интегрального преобразования Фурье получим функцию

$$F(r, \tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r, z) e^{j\tau z} dz,$$

уравнение (II.4.10) в виде

$$\frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} \left( x \frac{\partial F(x, \tau)}{\partial x} \right) + F(x, \tau) = 0 \quad (\text{VI.4.1})$$

и граничное условие (II.4.11) в виде

$$v \frac{\partial F}{\partial x} \Big|_{x=x_0} \begin{cases} -\frac{2v_0 \sin(\tau h)}{\tau} & \text{при } |z| \leq h; \\ 0 & \text{при } |z| \geq h, \end{cases} \quad (\text{VI.4.2})$$

где  $v = \sqrt{k^2 - \tau^2}$ ;  $x = vr$ ;  $x_0 = va$ ;  $k = \omega/c$  — волновое число;  $a$  — радиус цилиндра;  $c$  — фазовая скорость в свободном пространстве.

Решением (VI.4.1) является линейная комбинация цилиндрических функций  $\mathcal{J}_0(x)$  и  $N_0(x)$ , но поскольку  $F(x, t) \neq \infty$  при  $x=0$ , то в решение не должны входить функции Неймана.

Полагая, что  $F(x, \tau) = A(\tau) \mathcal{J}_0(x)$ , и используя граничное условие (VI.4.2), получаем

$$A(\tau) = \frac{2v_0 \sin(\tau h)}{\tau v \mathcal{J}'_0(x_0)}.$$

Искомая функция, удовлетворяющая условиям задачи, имеет вид

$$F(x, \tau) = \frac{2v_0 \sin(\tau h) \mathcal{J}_0(x)}{\tau v \mathcal{J}'_0(x_0)} = \frac{2v_0 \sin(\tau h) \mathcal{J}_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2})}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} \mathcal{J}'_0(a \sqrt{k^2 - \tau^2})}.$$

После обратного преобразования Фурье получаем

$$\psi(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2v_0 \sin(\tau h) \mathcal{J}_0(r \sqrt{k^2 - \tau^2})}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} \mathcal{J}'_0(a \sqrt{k^2 - \tau^2})} e^{-jz\tau} d\tau. \quad (\text{VI.4.3})$$

Несобственный интеграл (VI.4.3) можно преобразовать с помощью теории вычетов:

$$\psi(r, z) = \frac{v_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(k_{0m}h) \mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a)}{k_{0m}^2 \mathcal{J}'_0(\pi\alpha_{0m})} e^{-jk_{0m}z}, \quad (\text{VI.4.4})$$

где

$$k_{0m} = \sqrt{k^2 + \left(\frac{\pi\alpha_{0m}}{a}\right)^2} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_{0m}c}{2\pi f}\right)^2}; \quad (\text{VI.4.5})$$

$f$  — частота колебаний;  $\alpha_{0m}$  — корни уравнения:  $\frac{d\mathcal{J}_0(\pi\alpha)}{d\alpha} = 0$ ;  $c$  — фазовая скорость в свободном пространстве.

Если не учитывать естественное затухание колебаний, то потенциал  $\psi(r, z)$  при частотах, соответствующих  $k_{0m} = 0$ , неограниченно возрастает. Такие частоты называют частотами радиальных резонансов трубы. Они могут быть вычислены по формуле

$$f_{0m} = \frac{c}{2a} \alpha_{0m}. \quad (\text{VI.4.6})$$

Чтобы исключить разрывы функции  $\psi(r, z)$  при резонансных частотах, достаточно формально дополнить волновое число  $k_{0m}$  небольшой мнимой частью и вместо него подставить в формулу потенциала  $k'_{0m} = k_{0m} - j\delta_{0m}$ , а вместо квадрата волнового числа  $k_{0m}^2$  — квадрат модуля  $k'_{0m}$ , т. е.  $k_{0m}^{\prime 2} = k_{0m}^2 + \delta_{0m}^2$ , где по-прежнему  $k_{0m}$  определяется соотношением (VI.4.5).

С учетом естественного затухания потенциал скорости  $\psi(r, z)$  не имеет при резонансных частотах ( $k_{0m} = 0$ ) бесконечно больших значений и выражается формулой

$$\psi(r, z) = \frac{v_0}{\pi} \sum_1^{\infty} \frac{[\sin(k_{0m}h) \operatorname{ch}(\delta_{0m}h) + \cos(k_{0m}h) \sin(\delta_{0m}h)] \mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a)}{(k_{0m}^2 + \delta_{0m}^2) \mathcal{J}'_0(\pi\alpha_{0m})} \times e^{\pm \delta_{0m}z} e^{\pm jk_{0m}z}. \quad (\text{VI.4.7})$$

При частоте  $f_p = c\alpha_{0p}/(2a)$  члены суммы (VI.4.7) с номерами  $m \leq p-1$  будут содержать действительные волновые числа  $k_{0m}$ , а сла-

гаемые, у которых  $m > p - 1$  — мнимые ( $k_{0m} = \bar{j}\bar{k}_{0m}$ ). Для удобства анализа запишем (VI.4.7) в виде

$$\psi(z, r) = \frac{v_0}{\pi} \sum_{m=1}^{p-1} \frac{[\sin(k_{0m}h) \operatorname{ch}(\delta_{0m}h) + \cos(k_{0m}h) \operatorname{sh}(\delta_{0m}h)] \mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a)}{(k_{0m}^2 + \delta_{0m}^2) \mathcal{J}_0''(\pi\alpha_{0m})} \times \\ \times e^{-\delta_{0p}z} e^{-jk_{0p}z} + \frac{v_0}{\pi} \frac{\operatorname{sh}(\delta_{0p}h) \mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0p}r/a)}{\delta_{0p}^2 \mathcal{J}_0''(\pi\alpha_{0p})} e^{-\delta_{0p}z} + \\ + \frac{v_0}{\pi} \sum_{m=p+1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh}[(\bar{k}_{0m} + \delta_{0m})h] \mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a)}{(\bar{k}_{0m} + \delta_{0m})^2 \mathcal{J}_0''(\pi\alpha_{0m})} e^{-(\bar{k}_{0m} + \delta_{0m})z}, \quad (\text{VI.4.8})$$

где  $p = 2, 3, 4, \dots$ ;  $\delta_{0m}$  — коэффициент естественного затухания среды от  $0m$ -й волны;  $\alpha_{0m}$  — корни уравнения  $\mathcal{J}'_0(\pi\alpha) = 0$ ;  $k_{0m} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi\alpha_{0m}}{a}\right)^2} = \frac{2\pi f}{c} \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha_{0m}c}{2af}\right)^2}$ ;  $f$  — частота;  $k$  — волновое число;  $a$  — радиус цилиндрического канала;  $\bar{k}_{0m} = -\sqrt{\left(\frac{\pi\alpha_{0m}}{a}\right)^2 - k^2}$ , если  $m \geq p + 1$ ;  $\left(\frac{\pi\alpha_{0m}}{a}\right)^2 - k^2 > 0$ .

Составляющие первой суммы описывают бегущие волны с фазой —  $k_{0m}z$  и амплитудой

$$\frac{\sin(k_{0m}h) \operatorname{ch}(\delta_{0m}h) + \cos(k_{0m}h) \operatorname{sh}(\delta_{0m}h)}{k_{0m}^2 + \delta_{0m}^2} \frac{\mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a)}{\mathcal{J}_0''(\pi\alpha_{0m})} e^{-\delta_{0m}z}.$$

Каждая из этих волн распространяется с фазовой скоростью  $c_{0m} = c/\sqrt{1 - [\alpha_{0m}c/(2af)]^2}$  в положительном и отрицательном направлениях по оси  $Z$ . Амплитуды этих волн неодинаковы по фронту. Для волны, соответствующей индексу  $0m$ , амплитуда потенциала скорости (а значит, и амплитуда давления) на различных расстояниях от оси цилиндра различна: она пропорциональна функции Бесселя нулевого порядка  $\mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a)$  и имеет нули для тех значений  $r/a$ , для которых  $\mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0m}r/a) = 0$ .

Пусть  $\alpha_{0m} r_{0l}/a = \beta_{0l}$  — корни этого уравнения ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ). Тогда формула радиусов нулевых амплитуд:  $\alpha_{0m} r_{0l}/a = \beta_{0l}$ , откуда  $r_{0l} = a\beta_{0l}/\alpha_{0m}$ .

Вторая сумма состоит из членов, которые выражают собой колебательный процесс с амплитудой  $\frac{\operatorname{sh}[(\bar{k}_{0m} + \delta_{0m})h] \mathcal{J}_0\left(\pi\alpha_{0m}\frac{r}{a}\right)}{(\delta_{0m} + \bar{k}_{0m})^2 \mathcal{J}_0''(\pi\alpha_{0m})} e^{-(\delta_{0m} + \bar{k}_{0m})z}$ , имеющей нулевые значения в тех местах, для которых отношение  $r/a$  определяется формулой  $r_{0l}/a = \beta_{0l}/\alpha_{0m}$  ( $l = 1, 2, 3, \dots$ ;  $m = p + 1, p + 2, \dots$ ). Амплитуды колебаний убывают по экспоненциальному закону: на расстоянии  $|z| = 1/(\delta_{0m} + \bar{k}_{0m})$  она уменьшается в  $e$  раз. Кроме рассмотренных сумм в (VI.4.7) выделен член с заметно большей амплитудой  $\frac{v_0}{\pi} \frac{\operatorname{sh}(\delta_{0p}h) \mathcal{J}_0\left(\pi\alpha_{0p}\frac{r}{a}\right)}{\delta_{0p}^2 \mathcal{J}_0''(\pi\alpha_{0p})} e^{-\delta_{0p}z}$ , слабо уменьшающейся с увеличением  $|z|$  и образующей узловые цилиндрические поверх-

ности, радиусы которых  $r_{0l} = a\beta_{0l}/\alpha_{0p}$ . Этот член дает явное выражение для колебаний при радиальном резонансе.

При заданном отношении  $c/a$  имеется возможность получить чистые плоские волны с обычной скоростью  $c$ . Для этих волн частота  $f$  должна быть меньше:  $f_{02} = c\alpha_{02}/(2a)$ . При больших частотах наряду с плоской продольной волной появятся еще продольные волны, модулированные по фронту, скорость распространения которых больше скорости звука в свободном пространстве.

Таким образом, для плоских волн в трубе действует следующий критерий:

$$f < \frac{c}{2a} \alpha_{02}; \quad \alpha_{02} = 1,2197. \quad (\text{VI.4.9})$$

### § VI.5. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПОРШЕНЬ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Обобщением рассмотренной задачи является задача об излучении волн внутрь цилиндрического канала, создаваемых прямоугольным поршнем, расположенным на боковой поверхности цилиндра.

Пусть  $\varphi_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$  и  $r_0 = a$  — цилиндрические координаты прямоугольного поршня;  $2h$  и  $2d$  — его линейные размеры. Допустим, что поршень пульсирует со скоростью  $v_0 e^{j\omega t}$ . При установившемся режиме амплитуда потенциала в области  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ;  $-\infty < z < +\infty$  должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi(r, \varphi, z) + k^2\psi(r, \varphi, z) = 0, \quad (\text{VI.5.1})$$

граничному условию на внутренней поверхности цилиндра, условию конечности величины  $\psi$  и условию излучения по оси  $Z$ . Граничное условие можно сформулировать так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -v(\varphi, z), \quad (\text{VI.5.2})$$

где

$$v(\varphi, z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| > h, \quad |\varphi| \leq \pi, \\ v_0 & \text{при } |z| \leq h, \quad |\varphi| \leq \alpha, \\ 0 & \text{при } |z| \leq h, \quad |\varphi| > \alpha. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha = d/a$ ;  $a$  — внутренний радиус цилиндра (рис. VI.5.1).

Представим функцию  $v(r, \varphi)$  в виде ряда Фурье по  $\varphi$  в промежутке  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ :

$$v(\varphi, z) = \frac{B_0(z)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(z) \cos m\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m B_m(z) \cos m\varphi,$$

$$\text{где } \varepsilon_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } m=0; \\ 1 & \text{при } m \neq 0; \end{cases} \quad B_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v(\varphi, z) \cos m\varphi d\varphi.$$

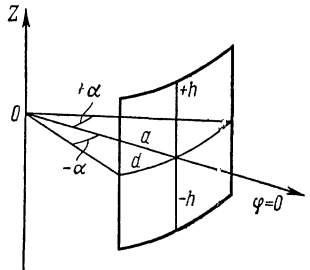


Рис. VI.5.1