

ности, радиусы которых  $r_{0l} = a\beta_{0l}/\alpha_{0p}$ . Этот член дает явное выражение для колебаний при радиальном резонансе.

При заданном отношении  $c/a$  имеется возможность получить чистые плоские волны с обычной скоростью  $c$ . Для этих волн частота  $f$  должна быть меньше:  $f_{02} = c\alpha_{02}/(2a)$ . При больших частотах наряду с плоской продольной волной появятся еще продольные волны, модулированные по фронту, скорость распространения которых больше скорости звука в свободном пространстве.

Таким образом, для плоских волн в трубе действует следующий критерий:

$$f < \frac{c}{2a} \alpha_{02}; \quad \alpha_{02} = 1,2197. \quad (\text{VI.4.9})$$

### § VI.5. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ПОРШЕНЬ НА БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЦИЛИНДРА

Обобщением рассмотренной задачи является задача об излучении волн внутрь цилиндрического канала, создаваемых прямоугольным поршнем, расположенным на боковой поверхности цилиндра.

Пусть  $\varphi_0 = 0$ ,  $z_0 = 0$  и  $r_0 = a$  — цилиндрические координаты прямоугольного поршня;  $2h$  и  $2d$  — его линейные размеры. Допустим, что поршень пульсирует со скоростью  $v_0 e^{j\omega t}$ . При установившемся режиме амплитуда потенциала в области  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ ;  $-\infty < z < +\infty$  должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\psi(r, \varphi, z) + k^2\psi(r, \varphi, z) = 0, \quad (\text{VI.5.1})$$

граничному условию на внутренней поверхности цилиндра, условию конечности величины  $\psi$  и условию излучения по оси  $Z$ . Граничное условие можно сформулировать так:

$$\frac{\partial\psi}{\partial r} \Big|_{r=a} = -v(\varphi, z), \quad (\text{VI.5.2})$$

где

$$v(\varphi, z) = \begin{cases} 0 & \text{при } |z| > h, \quad |\varphi| \leq \pi, \\ v_0 & \text{при } |z| \leq h, \quad |\varphi| \leq \alpha, \\ 0 & \text{при } |z| \leq h, \quad |\varphi| > \alpha. \end{cases}$$

Здесь  $\alpha = d/a$ ;  $a$  — внутренний радиус цилиндра (рис. VI.5.1).

Представим функцию  $v(r, \varphi)$  в виде ряда Фурье по  $\varphi$  в промежутке  $-\pi \leq \varphi \leq \pi$ :

$$v(\varphi, z) = \frac{B_0(z)}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m(z) \cos m\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m B_m(z) \cos m\varphi,$$

$$\text{где } \varepsilon_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } m=0; \\ 1 & \text{при } m \neq 0; \end{cases} \quad B_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} v(\varphi, z) \cos m\varphi d\varphi.$$

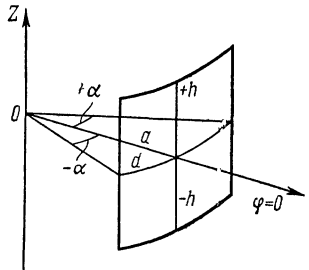


Рис. VI.5.1

Тогда граничное условие (VI.5.2) примет следующий вид:

$$-\frac{\partial \psi(r, \varphi, z)}{\partial r} \Big|_{r=a} = \begin{cases} \frac{2v_0}{\pi} \sum b_m \varepsilon_m \cos m\varphi & \text{при } |z| \leq h, \\ 0 & \text{при } |z| > h, \end{cases} \quad (\text{VI.5.3})$$

где

$$b_m = \frac{\sin m\alpha}{m} \quad \text{при } m = 1, 2, 3, \dots$$

Применив к выражению (VI.5.1) и граничному условию (VI.5.3) интегральное преобразование

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(r, \varphi, z) e^{i\tau z} dz = F(r, \varphi, \tau),$$

получим уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + (k^2 - \tau^2) F = 0 \quad (\text{VI.5.4})$$

с граничным условием

$$-\frac{\partial F}{\partial r} \Big|_{r=a} = \begin{cases} -\frac{4v_0 \sin \tau h}{\tau} \sum b_m \varepsilon_m \cos m\varphi & \text{при } |z| < h, \\ 0 & \text{при } |z| > h. \end{cases} \quad (\text{VI.5.5})$$

Как было показано выше, оно имеет решение в виде комбинации произведений цилиндрических и тригонометрических функций.

Чтобы удовлетворить граничным условиям и условию ограниченности потенциала при  $z=0$ , в качестве цилиндрической функции следует взять функцию Бесселя  $m$ -го порядка. Общее решение будет иметь вид

$$F(r, \varphi, \tau) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \mathcal{J}_m(r \sqrt{k^2 - \tau^2}) \cos m\varphi. \quad (\text{VI.5.6})$$

После подстановки (VI.5.6) в условие (VI.5.5) получим для произвольного значения угла  $\varphi$  тождество

$$\begin{aligned} & -\frac{4v_0 \sin \tau h}{\pi} \frac{\sin \tau h}{\tau} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m b_m \cos m\varphi = \\ & = -\sum_{m=0}^{\infty} A_m \sqrt{k^2 - \tau^2} \cos m\varphi \mathcal{J}'_m(a \sqrt{k^2 - \tau^2}). \end{aligned} \quad (\text{VI.5.7})$$

Коэффициенты  $A_m$  должны удовлетворять равенству

$$A_m = \frac{4v_0}{\pi} \varepsilon_m b_m \frac{\sin \tau h}{\tau \mathcal{J}'_m(a \sqrt{k^2 - \tau^2})}.$$

Проведем над функцией (VI.5.6) обратное Фурье-преобразование:

$\psi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F e^{-jz\tau} d\tau$ , и получим искомую функцию

$$\psi(r, \varphi, z) = \frac{2v_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m b_m \cos m\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(\tau h) \mathcal{J}_m(r \sqrt{k^2 - \tau^2})}{\tau \sqrt{k^2 - \tau^2} \mathcal{J}'_m(a \sqrt{k^2 - \tau^2})} e^{-jz\tau} d\tau. \quad (\text{VI.5.8})$$

Каждый член этой суммы может быть преобразован:

$$\begin{aligned} & \frac{\sin(h\tau) \mathcal{J}_m(r\sqrt{k^2-\tau^2})}{\tau\sqrt{k^2-\tau^2} \mathcal{J}'_m(a\sqrt{k^2-\tau^2})} e^{-jz\tau} d\tau = \\ & = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(hk_{mn})}{k_{mn}^2} \frac{\mathcal{J}_m(\pi\alpha_{mn}r/a)}{\mathcal{J}''_m(\pi\alpha_{mn})} e^{\mp jk_{mn}z}. \end{aligned} \quad (\text{VI.5.9})$$

Таким образом, потенциал скорости внутри канала, возбуждаемый прямоугольным поршневым излучателем, определяется двойным рядом:

$$\psi(r, z, \varphi) = \frac{2v_0}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_m b_m \cos m\varphi \frac{\mathcal{J}_m\left(\pi\alpha_{mn} \frac{r}{a}\right)}{\mathcal{J}''_m(\pi\alpha_{mn})} e^{\mp jk_{mn}z}, \quad (\text{VI.5.10})$$

где  $\varepsilon_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m=1, 2, 3, \dots; \end{cases}$   $k_{mn} = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi\alpha_{mn}}{a}\right)^2}$ ;  $k = \frac{\omega}{c}$ ;  
 $\alpha_{mn}$  — корни уравнения  $\mathcal{J}'_m(\pi\alpha) = 0$ ;  $b_m = \frac{\sin[m(d/a)]}{m}$ .

Точно так же, как это сделано для излучения кольца, введем в (VI.5.10) вместо волновых чисел  $k_{mn}$  комплексные волновые числа  $k_{mn} - j\delta_{mn}$ , с помощью которых формально учитывают затухание. После соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned} \psi(r, \varphi, z) &= \frac{2v_0}{\pi} \sum_{m=0}^{l-1} \sum_{n=1}^{p-1} \varepsilon_m b_m \cos m\varphi \frac{\sin(k_{mn}h) \operatorname{ch}(\delta_{mn}h) + \cos(k_{mn}h) \operatorname{sh}(\delta_{mn}h)}{k_{mn}^2 + \delta_{mn}^2} \times \\ &\times \frac{\mathcal{J}_m(\pi\alpha_{mn}r/a)}{\mathcal{J}''_m(\pi\alpha_{mn})} e^{-(\delta_{mn} + jk_{mn})z} + \frac{\operatorname{sh}(\delta_{lp}h) \mathcal{J}_l\left(\pi\alpha_{lp} \frac{r}{a}\right)}{\delta_{lp}^2 \mathcal{J}''_l(\pi\alpha_{lp})} e^{-\delta_{lp}z} + \\ &+ \sum_{m=l+1}^{\infty} \sum_{n=p+1}^{\infty} \varepsilon_m b_m \cos m\varphi \frac{\operatorname{sh}[(k_{mn} + \delta_{mn})h] \mathcal{J}_m(\pi\alpha_{mn}r/a)}{(\bar{k}_{mn} + \delta_{mn})^2 \mathcal{J}''_m(\pi\alpha_{mn})} e^{-(\delta_{mn} + \bar{k}_{mn})z}, \end{aligned} \quad (\text{VI.5.11})$$

где  $\varepsilon_m = \begin{cases} 1/2 & \text{при } m=0, \\ 1 & \text{при } m=1, 2, 3, \dots; \end{cases}$   $\bar{k}_{mn} = \sqrt{\left(\frac{\pi\alpha_{mn}}{a}\right)^2 - k^2}$ ;  $\pi\alpha_{lp} = ka$ ;  
 $lp = 0, 1, 2, \dots$ ;  $\alpha_{lp}$  — корень уравнения  $\mathcal{J}'_l(\pi\alpha) = 0$ ;  $\delta_{mn}$  — коэффициент естественного затухания в жидкости, относящийся к  $mn$ -й компоненте поля;  $l, p$  — индексы компонент поля, соответствующие резонансам жидкости в трубе.

Потенциал поля (VI.5.11) для случая  $d/a = \pi$  легко преобразовать к (VI.4.6), если воспользоваться равенством

$$b_m \big|_{d/a=\pi} = \frac{\sin m\pi}{m} = \begin{cases} \pi & \text{при } m=0, \\ 0 & \text{при } m=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

Если угловой размер излучателя меньше, чем  $\pi/m$ , например,  $d/a = \pi/2, \pi/3, \pi/4, \dots, \pi/l$ , то сомножители, содержащие  $b_m$ , из

суммы по  $m$  выпадают, обращая в нули члены, кратные  $l$ . Каждая бегущая волна, входящая в первую сумму (VI.5.11), определяется по формуле

$$\psi_{mn} = \frac{2v}{\pi} \varepsilon_m \frac{\sin md/a \cos \varphi}{m} \frac{\sin(k_{mn}h) \operatorname{ch}(\delta_{mn}h) + \cos(k_{mn}h) \operatorname{sh}(\delta_{mn}h)}{k^2 + \delta_{mn}^2} \times \\ \times \frac{\mathcal{J}_m(\pi\alpha_{mn}r/a)}{\mathcal{J}'_m(\pi\alpha_{mn})} e^{-(\delta_{mn} + ik_{mn})z}. \quad (\text{VI.5.12})$$

В частности, для  $m=0$

$$\psi_{0n} = \frac{v_0}{\pi} \frac{d}{a} A_{0n} e^{-(\delta_{0n} + ik_{0n})z},$$

где  $A_{0n} \propto \mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0n}r/a)$ .

Коэффициенты  $A_{0n}$  обращаются в нуль на цилиндрических узловых поверхностях, т. е. при

$$\mathcal{J}_0(\pi\alpha_{0n}r/a) = 0. \quad (\text{VI.5.13})$$

Обозначим корни уравнения (VI.5.13)  $\pi\alpha_{0n}(r/a) = \pi\beta_{0l}$ . Таким образом, для радиусов цилиндрических узловых поверхностей получим выражение

$$r_{0l} = a \frac{\beta_{0l}}{\alpha_{0m}}.$$

При  $m=1$

$$\psi_{1n} = \frac{2v_0}{\pi} \sin \frac{d}{a} \cos \varphi A_{1n} e^{-(\delta_{1n} + ik_{1n})z},$$

где коэффициенты  $A_{1n} \sim \mathcal{J}_1(\pi\alpha_{1n}r/a)$  обращаются в нуль при условии, если  $\mathcal{J}_1(\pi\alpha_{1n}r/a) = 0$ .

Радиусы узловых поверхностей

$$r_{1l} = a \frac{\beta_{1l}}{\alpha_{1n}},$$

где  $\pi\beta_{1l}$  — корни уравнения  $\mathcal{J}_1(\pi\beta) = 0$ .

Наконец, члены сумм с индексом  $mn$

$$\psi_{mn} = \frac{v_0}{\pi} \frac{\sin(md/a) \cos m\varphi}{m} A_{mn} e^{-(\delta_{mn} + ik_{mn})z}$$

имеют амплитуды, пропорциональные  $\mathcal{J}_{mn}(\pi\alpha_{mn}r/a)$ , и соответствуют волнам, также имеющим цилиндрические узловые поверхности, радиусы которых  $r_{ml} = a \frac{\beta_{ml}}{\alpha_{ml}}$  [ $\beta_{ml}$  и  $\alpha_{ml}$  — корни уравнений  $\mathcal{J}_m(\pi\beta) = 0$  и  $\mathcal{J}'_m(\pi\alpha) = 0$ ]. Для числовых оценок узловых радиусов труб в табл. VI.5.1 приведены корни уравнения  $\mathcal{J}_m(\pi\beta) = 0$ , отнесенные к  $\pi$ . Табл. VI.5.2 содержит корни уравнения  $d\mathcal{J}_x/dx = 0$ , отнесенные к  $\pi$  ( $\alpha_{mn} = x_{mn}/\pi$ ).

Обратим внимание на множитель

$$B_m = \frac{\sin(md/a)}{m} \cos m\varphi,$$

входящий в выражение (VI.5.12).

		Корни $B_{mn}$ уравнения $\mathcal{J}(x) = 0$				
		1	2	3	4	5
$n$	$m$					
0	0	0,7655	1,7571	2,7546	3,7535	4,7527
1	1	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411	5,2429
2	2	1,6348	2,6792	3,6988	4,7097	5,7168
3	3	2,0308	3,1070	4,1428	5,1639	6,1781
4	4	2,4153	3,5221	4,5748	5,6073	6,6294

Таблица VI.5.2

		Корни уравнения $\mathcal{J}'_m(x) = 0$				
		1	2	3	4	5
$n$	$m$					
0	0	0,0000	1,2197	2,2331	3,2383	4,2411
1	1	0,5861	1,6970	2,7140	3,7261	4,7312
2	2	0,9722	2,1346	3,1734	4,1923	5,2036
3	3	1,3373	2,5513	3,6115	5,6428	5,6624
4	4	1,6926	2,9547	4,0368	5,0815	6,1103

Для волн с индексом  $m=0$  множитель  $B_0$  равен

$$B_0 = \lim_{m \rightarrow 0} \frac{\sin(md/a)}{m} \cos m\varphi = \frac{d}{a}$$

и не зависит от угла  $\varphi$ . Для  $m=1$

$$B_1 = \sin \frac{d}{a} \cos \varphi.$$

Очевидно, для углов  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2, 5\pi/2, \dots$  множитель  $B_1 = 0$ .

Таким образом, в трубе для волн с индексом  $m=1$  существует одна диаметрально узловая плоскость (рис. V.5.2). Для волн с индексом  $m=2$  множитель равен  $B_2 = \frac{1}{2} \sin \frac{2d}{a} \cos 2\varphi$ . Очевидно, при  $\varphi_{2n} = \pi/4; 3\pi/4; 5\pi/4; \dots$  этот множитель обращается в нуль. В трубе образуются две диаметрально плоскости. При  $m=3$  образуются три диаметрально узловые плоскости.

Сомножитель  $B_m$  обращается в нуль при  $\sin(md/a)/m$ , если углы  $\varphi$  определяются уравнением  $\cos m\varphi = 0$ , т. е. при  $\varphi = (2l+1)\pi/(2m)$ . В этом случае образуется  $m$  узловых плоскостей.

Заметим, что в случае поршневого излучателя в трубе возникает плоская звуковая волна, если между диаметром трубы и частотой выполняется соотношение (VI.4.9).

Возбуждение в трубах плоских звуковых волн с помощью поршневого излучателя ограниченных размеров имеет некоторое преимущество перед способом возбуждения плоских волн с помощью кольцевого преобразователя. Если необходимо возбуждать звуковые волны на резонансных частотах, то для цилиндрического преобразователя, вмонтированного в трубу диаметром  $d$ , имеется только одна возможная частота  $f = c_0/(2\pi a)$  ( $c_0$  — скорость звука в материале преобразователя). Сравнивая эту формулу с (VI.4.9), можно видеть, что кольцевые преобразователи возбуждают плоские волны в цилиндрических трубах при выполнении определенного соотношения между скоростями звука в материале преобразователя и в веществе, заполняющем трубу. Это соотношение следует из неравенств

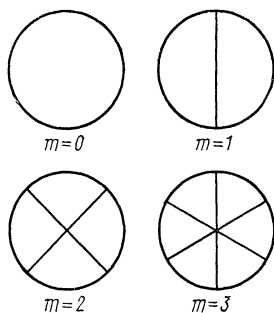


Рис. VI.5.2

$$\frac{c_0}{2\pi a_{cp}} < \frac{1,2197}{2} c; \quad \frac{c_0}{c} < 1,2197\pi \frac{a_{cp}}{a} \approx 3,8 \frac{a_{cp}}{a}. \quad (VI.5.14)$$

Для преобразователя из магнитострикционного материала  $c_0 \approx 5000$  м/с;  $a_{cp}/a \approx 1$ ; для воды  $c = 1500$  м/с;  $c_0/c \approx 3,3$ . Однако если труба заполнена воздухом, отношение  $c_0/c$  не удовлетворяет условию (VI.5.14), т. е. плоская волна не будет возбуждаться.

Значительно большими возможностями обладает способ прямоугольного поршня: во-первых, резонансная частота поршня не зависит от диаметра трубы и определяется толщиной преобразователя. Изменяя толщину преобразователя, начиная со стержневых систем и кончая пластинами, можно в пределах от небольших частот, вплоть до первой критической, изменять частоту возбуждения плоских волн в трубах. Кроме того, способ возбуждения плоских волн с помощью прямоугольного поршня универсален относительно вещества, заполняющего трубу.

## ГЛАВА VII

### ЭЛЕМЕНТЫ АКУСТИКИ ПОМЕЩЕНИЙ

#### § VII.1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Звуковые волны в закрытых помещениях, многократно отражаясь от границ, образуют сложное поле колебательного движения воздуха. Законы распределения колебательной скорости частиц воздуха, добавочного давления и потока акустической энергии в закрытых помещениях определяются не только свойствами источника звука, но также геометрическими размерами, формой помещения и способностью стен, потолка и пола поглощать акустическую энергию.