ренное в реверберационной камере, т. е. в помещении с заглушенными границами.

При полной заглушенности помещения ($m = m_0$) индекс диффузности равен нулю. Наоборот, если $m = 0$, то индекс диффузности равен единице и поле абсолютно диффузно.

Для большего числа залов проведенные измерения величины i_d дают ее среднее значение $\approx 65\%$. С увеличением объема помещения ($V > 10\,000$ м^3) i_d уменьшается. Увеличение индекса диффузности достигается при установке звукорассеивающих колонн, рельефов, расчленяющих элементов и т. д.

§ VII.4. РЕЗОНАНСНЫЕ СВОЙСТВА ЗАМКНУТОГО ОБЪЕМА

В результате многократного отражения звуковых волн от границ помещения возникает замкнутое трехмерное волновое поле. Обычно линейные размеры помещения значительно больше длины звуковых волн. Замкнутый объем помещения представляет собой колебательную систему со спектром собственных частот, при этом каждой собственной частоте соответствует свой декремент затухания. Если источник звука создает звуковые сигналы с меняющимся спектральным и амплитудным распределением, то эти сигналы возбудят колебания воздуха в помещении с частотами, близкими к резонансным, и по мере изменения спектра будут возникать все новые и новые моды собственных колебаний замкнутого объема, которые, накладываясь на ранее возникающие и имеющие уровни выше порога слышимости, в большей или меньшей степени исказят начальный сигнал. Поскольку декремент затухания составляющих спектра частот различен, то каждая из составляющих частот имеет свое время реверберации.

Изучение волновой теории реверберации начнем с собственных частот замкнутого объема в предположении, что границы помещения отражают звук без поглощения и что поглощением в объеме можно пренебречь.

Фундаментальные функции и собственные частоты закрытых помещений. В зависимости от формы помещения в замкнутом объеме могут возникнуть собственные колебания с различным набором собственных частот, соответствующих плоским, цилиндрическим или сферическим волнам. Рассмотрим подробно фундаментальные функции и резонансные частоты прямоугольного объема. Для этого необходимо найти решения уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + \frac{\omega^2}{c^2}\psi = 0, \qquad \text{(VII.4.1)}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$-\frac{\partial\psi}{\partial x}\bigg|_{\substack{x=l_x\\ x=0}} = 0, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial y}\bigg|_{\substack{y=l_y\\ y=0}} = 0, \quad -\frac{\partial\psi}{\partial z}\bigg|_{\substack{z=l_z\\ z=0}} = 0. \qquad \text{(VII.4.2)}$$

Нетрудно показать, что такими решениями будут частные решения вида

$$\psi_{nmp} = A_{mnp}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}\cos\frac{p\pi z}{l_z}. \qquad \text{(VII.4.3)}$$

Таким образом, в прямоугольном помещении, ограниченном идеально жесткими стенками, существует дискретный спектр резонансных частот, определяемый выражением

$$\frac{\omega_{mnp}}{2\pi}=f_{mnp}=\frac{c}{2}\sqrt{\frac{m^2}{l_x^2}+\frac{n^2}{l_y^2}+\frac{p^2}{l_z^2}}. \qquad (VII.4.4)$$

Формула собственных частот допускает следующую геометрическую интерпретацию. Отложим на осях прямоугольной системы координат отрезки, пропорциональные $f_m=\frac{c}{2}\frac{m}{l_x}$, $f_n=\frac{c}{2}\frac{n}{l_y}$ и $f_p=\frac{c}{2}\frac{p}{c_з}$. Тогда собственная частота в этой системе координат изобразится точкой с координатами f_m, f_n и f_p или концом вектора f_{mnp}, длина которого $f_{mnp}=\sqrt{f_m^2+f_n^2+f_p^2}$, а направление определяется направляющими косинусами:

$$\cos(f,\ f_m)=\frac{f_m}{\sqrt{f_m^2+f_n^2+f_p^2}}=\frac{m}{l_x\sqrt{(m/l_x)^2+(n/l_y)^2+(p/l_z)}},$$

$$\cos(f,\ f_n)=\frac{f_n}{\sqrt{f_m^2+f_n^2+f_p^2}}=\frac{n}{l_y\sqrt{(m/l_x)^2+(n/l_y)^2+(p/l_z)}},$$

$$\cos(f,\ f_p)=\frac{f_p}{\sqrt{f_m^2+f_n^2+f_p^2}}=\frac{P}{l_z\sqrt{(m/l_x)^2+(n/l_y)^2+(p/l_z)^2}}.$$

Назовем такое представление собственных частот *пространством частот*. Известно, что каждой собственной частоте соответствует волновое число

$$k_{mnp}=\frac{\omega_{mnp}}{c}=\pi\sqrt{\left(\frac{m}{l_x}\right)^2+\left(\frac{n}{l_y}\right)^2+\left(\frac{p}{l_z}\right)^2}. \qquad (VII.4.5)$$

Волновой вектор $\mathbf{k}_{mnp}$ совпадает по направлению с нормалью к фронту волны и имеет компоненты $k_m=\pi_m/l_x$, $k_n=\pi_n/l_y$, $k_p=$ $=\pi p/l_z$. Направляющие косинусы этого вектора:

$$\cos(k_{mnp},\ x)=\frac{k_m}{\sqrt{k_m^2+k_n^2+k_p^2}},$$

$$\cos(k_{mnp},\ y)=\frac{k_n}{\sqrt{k_m^2+k_n^2+k_p^2}},$$

$$\cos(k_{mnp},\ z)=\frac{k_p}{\sqrt{k_m^2+k_n^2+k_p^2}}.$$

Таким образом, направляющие косинусы волнового вектора, построенного в геометрическом пространстве, совпадают с направляющими косинусами вектора собственной частоты, построенного в пространстве частот. Этим установлено взаимное соответствие между множествами собственных частот и пространственных мод колебаний.

Все моды свободных колебаний закрытого объема можно разделить на три группы: осевые, кососкользящие и косые.

Осевыми называются волны, для которых направление волнового вектора параллельно одному из ребер прямоугольного помещения. Имеется три вида осевых волн: x-осевая волна $[\mathbf{k}(k_x;\ 0;\ 0)]$; y-осевая волна $[\mathbf{k}(0,\ k_y,\ 0)]$ и z-осевая волна $[\mathbf{k}(0,\ 0,\ k_z)]$. В пространстве частот этим волнам соответствуют те частоты, радиусы-векторы которых совпадают с соответствующей осью координат пространства частот.

Кососкользящими называют волны с волновым вектором, параллельным одной из координатных плоскостей. Такие волны делят на следующие группы: xy-касательная волна $[\mathbf{k}(k_x,\ k_y,\ 0)]$; xz-касательная волна $[\mathbf{k}(k_x,\ 0,\ k_z)]$ и yz-волна $[\mathbf{k}(0,\ k_y,\ k_z)]$. В пространстве частот касательным волнам соответствуют векторы $\mathbf{f}_{mnp}$, параллельные координатным плоскостям пространства частот. Для косой волны ни одна из компонент волнового вектора не равна нулю.

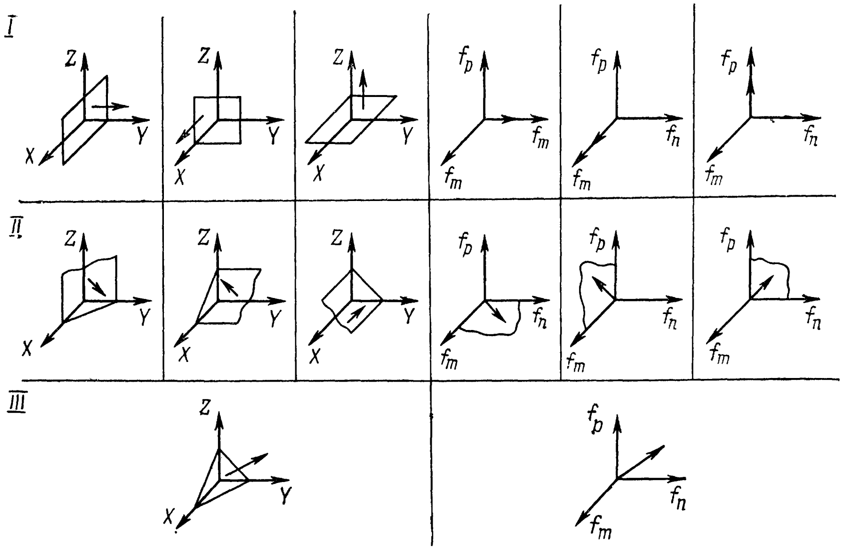

Рис. VII.4.1

На рис. VII.4.1 приведено схематическое изображение фронта плоских волн по отношению к ребрам прямоугольного помещения с разной ориентацией волновых векторов $\mathbf{k}_{mnp}$ и $\mathbf{f}_{mnp}$.

В зависимости от геометрических размеров прямоугольного помещения можно провести расчет собственных частот по формуле (VII.4.4). Рассматривая все тройки чисел m, n и p, обычно находят собственные частоты в пределах от f до $f+\Delta f$.

Например, собственные частоты прямоугольного помещения размером $3\times4,\ 5\times6$ м, лежащие в пределах 1—100 Гц, изображены на рис. VII.4.2. В распределении собственных частот прямоугольного объема наблюдаются следующие особенности: во-первых, спектр собственных частот с увеличением частоты сгущается; во-вторых, некоторые собственные частоты вырождены, т. е. одной частоте соответствует несколько мод колебаний. На рисунке эти частоты изображены удлиненной линией с цифрой, указывающей кратность повторения частоты.

Найдем общее число собственных частот в заданном интервале $f,\ f+\Delta f$.

Для решения этой задачи воспользуемся понятием пространства собственных частот. Каждую собственную частоту можно рассматривать как вектор в пространстве собственных частот.

Если компоненты этого вектора откладывать по трем взаимно перпендикулярным осям, то каждой частоте будет соответствовать конец вектора $\mathbf{f}_{mnp}$, лежащий в первом октанте прямоугольного пространства частот. Поскольку m, n и p — целые числа, то при их изменении конец $\mathbf{f}_{mnp}$ будет изменять длину и направление не непрерывно, а скачками, поэтому пространство собственных частот нельзя представить состоящими из сплошного числа точек подобно геометрическому. Пространство частот состоит из ячеек с ребрами $c/(2l_x)$, $c/(2l_y)$, $c/(2l_z)$; объем каждой ячейки равен $c^3/(8V_0)$, где $V_0 = l_x l_y l_z$, так что каждому значению собственной частоты соответствует по крайней мере, одна ячейка. Эти соображения позволяют вычислить полное число собственных частот объема, лежащих ниже некоторой заданной частоты. В самом деле, если известны объемы частотного пространства с максимальной частотой f и элементарной ячейки, то число собственных частот можно получить при делении общего объема пространства частот на объем ячейки. Подсчет числа собственных частот будем вести для каждой группы волн.

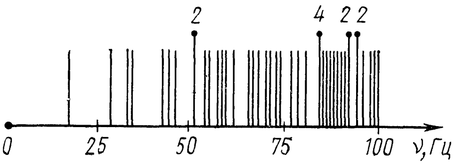

Рис. VII.4.2

Для осевых волн общий объем ячеек фазового пространства на оси f_m равен длине f, умноженной на площадь $c^2/(4l_y l_z)$. Точно так же общие объемы пространства частот по осям f_n и f_p соответственно равны $c^2/(4l_y l_z)$ и $c^2/(4l_x l_y)$. Таким образом, полный объем для собственных частот осевых волн равен $\frac{c^2}{4}\left(\frac{1}{l_y l_z}+\frac{1}{l_y l_x}+\frac{1}{l_x l_z}\right)f$. Разделив эту величину на объем одной ячейки $c^3/(8l_x l_y l_z)$, получим общее число осевых волн:

$$N=\frac{f\,(l_x+l_y+l_z)}{8c}=\frac{Lf}{8c},$$

где $L=l_x+l_y+l_z$.

В интервале от f до $f+\Delta f$ содержится осевых частот

$$\Delta N_1=\frac{l_x+l_y+l_z}{8c}\,\Delta f.$$

Для касательных волн векторы собственных частот лежат в координатных плоскостях пространства частот. В каждой из координатных плоскостей пространства частот построим четвертую часть окружности с центром в начале координат и радиусами, равными граничной частоте f. Построенные таким образом кривые ограничат на координатных плоскостях площади $\pi f^2/4$.

Собственные частоты касательных волн соответствуют ячейкам, расположенным на координатных плоскостях. Высоты слоев ячеек собственных частот, расположенных на координатных плоскостях *топ*, *тор*, *пор*, соответственно равны $c/(2l_z)$, $c/(2l_y)$, $c/(2l_x)$. Объем каждого слоя, лежащего в пределах измерения частоты от 0 до f, равен $\pi f^2 c/(8l_z)$, $\pi f^2 c/(8l_y)$, $\pi f^2 c/(8l_x)$. Общий объем ячеек, соответствующих волнам,

$$V=\frac{\pi f^2}{4}\left(\frac{c}{2l_z}+\frac{c}{2l_y}+\frac{c}{2l_x}\right).$$

Объем одной ячейки $V_0=c^3/(8l_xl_yl_z)$, поэтому число частот этого типа волн

$$N_2=\frac{V}{V_0}=\frac{2\pi f^2}{4c^2}(l_yl_z+l_xl_z+l_yl_x)=\frac{\pi S}{4c^2}f^2,$$

где S — общая площадь поверхностей, ограничивающих помещение.

Число косых мод с частотами меньшими, чем заданная, равно общему числу ячеек пространства частот, находящихся в октанте сферического объема радиусом f. Объем шара радиусом f равен $4\pi f^2/3$, объем октанта составляет $\pi f^3/6$, поэтому число косых мод равно

$$N_3=\frac{1}{8}\,\frac{4}{3}\pi f^3\left(\frac{c^3}{8l_xl_yl_z}\right)^{-1}=\frac{4\pi}{3}l_xl_yl_z\frac{f^3}{c^3}=\frac{4\pi}{3}V\frac{f^3}{c^3}.$$

Общее число мод колебаний прямоугольного помещения для частот меньших, чем граничная f, выражается суммой всех частот:

$$N=N_1+N_2+N_3=\frac{L}{8c}f+\frac{\pi S}{4c^2}f^2+\frac{4\pi V}{3c^3}f^3. \qquad \text{(VII.4.6)}$$

Число собственных мод колебаний прямоугольного объема, лежащих в интервале частот f, $f+\Delta f$, равно

$$\Delta N=\left(\frac{L}{8c}+\frac{\pi S}{2c^2}f+\frac{4\pi V}{c^3}f^2\right)\Delta f. \qquad \text{(VII.4.7)}$$

Фундаментальные функции и собственные частоты цилиндрического объема находят как решение волнового уравнения в цилиндрических координатах при граничных условиях

$$\left.\frac{\partial\Psi(r,\varphi,z,t)}{\partial r}\right|_{r=a}=0;\quad \left.\frac{\partial\Psi(r,\varphi,z,t)}{\partial z}\right|_{\substack{z=0\\ z=h}}=0.$$

В результате получают, что в цилиндрическом объеме возможны колебания, определяемые следующими функциями:

$$\Psi^{(l)}_{mnp}=A^{(l)}_{mnp}\mathscr{J}_m\left(\pi\alpha_{mn}\frac{r}{a}\right)\cos m\varphi\cos\left(p\pi\frac{z}{h}\right)\cos\left(\omega_{mnp}t+\beta^{(l)}_{mnp}\right), \qquad \text{(VII.4.8)}$$

$$\Psi^{(0)}_{mnp}=A^{(0)}_{mnp}\mathscr{J}_m\left(\pi\alpha_{mn}\frac{r}{a}\right)\cos m\varphi\cos\left(p\pi\frac{z}{h}\right)\cos\left(\omega_{mnp}t+\beta^{(0)}_{mnp}\right), \qquad \text{(VII.4.9)}$$

где $\Psi^{(l)}_{mnp}$ и $\Psi^{(0)}_{mnp}$ — потенциал скорости симметричных и несимметричных колебаний; $\pi\alpha_{mn}$ — корни уравнения $\mathscr{J}'_m(x)=0$; r и φ — полярная и угловая координаты точек цилиндрического объема; z — координата по оси Z; a — радиус цилиндра; h — его высота; $\beta_{mnp}^{(l,\,0)}$ — фазы колебаний; $\omega_{mnp}=\pi c\sqrt{\left(\frac{\alpha_{mn}}{a}\right)^2+\left(\frac{p}{n}\right)^2}$ — собственные частоты цилиндрического объема; c — фазовая скорость распространения упругих волн в свободном пространстве, $m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; $n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$; $p=1,\ 2,\ 3,\ \ldots$

Каждая собственная частота ω_{0np} соответствует форме колебаний с индексами 0, n, p, имеющей $n-1$ узловых цилиндров, $p-1$ узловых поперечных плоскостей. Частоты, у которых $m\neq 0$, двукратно вырождены, т. е. каждой частоте ω_{mnp} при $m\neq 0$ соответствуют две формы колебаний — симметричная и несимметричная. У этих форм $n-1$ узловых цилиндров, $p-1$ поперечных и m диаметричных узловых плоскостей.

На основании представления о пространстве частот цилиндрического объема можно провести расчет числа мод колебаний всех типов. Число собственных частот цилиндрического помещения в области изменения частоты от f до $f+\Delta f$ определяется формулой

$$\Delta N=\left(\frac{4\pi V f^2}{c^3}+\frac{\pi S f}{2c^2}+\frac{L}{8c}\right)\Delta f, \tag{VII.4.10}$$

где V — объем цилиндрического помещения; S — площадь стен потолка и пола; $L=4\pi a+4h$ — линейный параметр.

За исключением слагаемого $L/(8c)$, формула (VII.4.10) для цилиндрического помещения совпадает с соответствующей формулой для прямоугольного помещения. Для очень высоких частот можно ограничиться первым членом (VII.4.10): $\Delta N=\frac{4\pi V}{c^3}f^2\Delta f$.

Сферические помещения. Фундаментальные функции и собственные частоты для сферического объема можно найти, решая уравнение Гельмгольца в сферических координатах r, θ, φ при граничном условии $\partial\Psi/\partial r_{r=a}=0$.

Решение этого уравнения (см. приложение III) выражается посредством сферических функций Y_m и функций Бесселя полуцелого порядка:

$$\Psi(r,\ \theta,\ \varphi,\ t)=A_m Y_m(\theta,\ \varphi)\, j_m(kr)\, e^{j\omega t},$$

где $Y_m(\theta,\ \varphi)=P_m(\cos\theta)+\sum\limits_{n=0}^{m}(a_{mn}\cos n\varphi+a'_{mn}\sin n\varphi)\,P_m^{(n)}(\cos\theta)$ — сферическая функция m-го порядка.

Собственные частоты колебаний сферического объема

$$\omega_{mn}=\frac{\pi\beta_{mn}}{a}c, \tag{VII.4.11}$$

где $\pi\beta_{mn}$ — корни уравнения $j'_m(x)=0$, a — радиус шара, c — скорость звука.

Каждому значению числа m соответствует множество типов колебаний сферического объема. Частоты ω_{0n} возможны у колебаний с узловыми сферами. Число узловых сфер $n-1$. При этом каждой частоте отвечает только одна форма колебаний. При $m \neq 0$ каждой частоте ω_{mn} будут соответствовать несколько дополнительных форм колебаний. Например, при $m=1$ одной частоте соответствуют две формы, при $m=2$ — четыре. Вообще, если $m=l$, то одной частоте соответствует l^2 форм колебаний.

Частоты, для которых существует несколько форм колебаний, называют вырожденными. В цилиндрическом и сферическом объемах наблюдается много вырожденных частот. Реализация той или иной вырожденной моды подчинена закону случая, что создает благоприятные условия для флуктуаций уровня звучания. Поэтому цилиндрические и сферические помещения непригодны для залов и студий.

Сравнивая распределения собственных частот в прямоугольном цилиндрическом и сферическом помещениях, видим, что с повышением симметрии помещения увеличивается число вырожденных мод. В результате частотный спектр становится все более и более неравномерным, что вызывает значительное искажение в передаче сигнала как за счет неравномерного усиления отдельных частотных составляющих, так и за счет флуктуации уровня реверберации для различных частот.

Подсчет полного числа форм колебаний для сферического объема показывает, что для высоких частот различных мод колебаний, лежащих между f и $f+\Delta f$, число собственных колебаний пропорционально квадрату частоты:

$$\Delta N = \frac{4\pi V}{c^3} f^2 \Delta f. \qquad \text{(VII.4.12)}$$

Можно доказать, что формула (VII.4.12) выполняется для объема любой формы.

С учетом вырождения мод формулы числа собственных частот для прямоугольного, цилиндрического и сферического объемов дают завышенные результаты. Чтобы получить точный результат, необходимо из полного числа собственных частот, укладывающихся в спектральный интервал от f до $f+\Delta f$, вычесть число случаев вырождения.

§ VII.5. УЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ

Для того чтобы расширить результаты, полученные для помещений с границами, способными поглощать звуковую энергию (см. § VII.4), достаточно идеализированные граничные условия заменить граничными условиями, в которых учитывается комплексный импеданс границы:

$$z = \frac{p}{v_n} = \frac{\rho\, \partial\overline{\Psi}/\partial t}{-\partial\overline{\Psi}/\partial n}. \qquad \text{(VII.5.1)}$$

Тогда

$$-\frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial n} = \varkappa\rho \frac{\partial\overline{\Psi}}{\partial t}, \qquad \text{(VII.5.2)}$$

где $\varkappa = 1/z$ — комплексная механическая проводимость поверхности.