с узловыми сферами. Число узловых сфер $n-1$. При этом каждой частоте отвечает только одна форма колебаний. При $m \neq 0$ каждой частоте ω_{mn} будут соответствовать несколько дополнительных форм колебаний. Например, при $m=1$ одной частоте соответствуют две формы, при $m=2$ — четыре. Вообще, если $m=l$, то одной частоте соответствует l^2 форм колебаний.

Частоты, для которых существует несколько форм колебаний, называют вырожденными. В цилиндрическом и сферическом объемах наблюдается много вырожденных частот. Реализация той или иной вырожденной моды подчинена закону случая, что создает благоприятные условия для флуктуаций уровня звучания. Поэтому цилиндрические и сферические помещения непригодны для залов и студий.

Сравнивая распределения собственных частот в прямоугольном цилиндрическом и сферическом помещениях, видим, что с повышением симметрии помещения увеличивается число вырожденных мод. В результате частотный спектр становится все более и более неравномерным, что вызывает значительное искажение в передаче сигнала как за счет неравномерного усиления отдельных частотных составляющих, так и за счет флуктуации уровня реверберации для различных частот.

Подсчет полного числа форм колебаний для сферического объема показывает, что для высоких частот различных мод колебаний, лежащих между f и $f+\Delta f$, число собственных колебаний пропорционально квадрату частоты:

$$\Delta N = \frac{4\pi V}{c^3} f^2 \Delta f. \qquad \text{(VII.4.12)}$$

Можно доказать, что формула (VII.4.12) выполняется для объема любой формы.

С учетом вырождения мод формулы числа собственных частот для прямоугольного, цилиндрического и сферического объемов дают завышенные результаты. Чтобы получить точный результат, необходимо из полного числа собственных частот, укладывающихся в спектральный интервал от f до $f+\Delta f$, вычесть число случаев вырождения.

§ VII.5. УЧЕТ ПОГЛОЩЕНИЯ

Для того чтобы расширить результаты, полученные для помещений с границами, способными поглощать звуковую энергию (см. § VII.4), достаточно идеализированные граничные условия заменить граничными условиями, в которых учитывается комплексный импеданс границы:

$$z = \frac{p}{v_n} = \frac{\rho \partial \overline{\Psi}/\partial t}{-\partial \overline{\Psi}/\partial n}. \qquad \text{(VII.5.1)}$$

Тогда

$$-\frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial n} = \varkappa \rho \frac{\partial \overline{\Psi}}{\partial t}, \qquad \text{(VII.5.2)}$$

где $\varkappa = 1/z$ — комплексная механическая проводимость поверхности.

Решение волнового уравнения $\Delta\overline{\Psi}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overline{\Psi}}{\partial t^2}$ должно удовлетворять комплексному граничному условию. Поэтому решение будем искать в форме комплексной периодической функции:

$$\overline{\Psi}=(\Phi-j\Psi)\,\mathrm{e}^{-(\delta-j\omega)t},$$

$$\overline{\Psi}=(\Phi-j\Psi)\,\mathrm{e}^{-j(\omega-j\delta)t}. \qquad \text{(VII.5.3)}$$

При подстановке решения (VII.5.3) в волновое уравнение получаем для действительной и мнимой частей амплитуды:

$$\begin{aligned}\Delta\Phi&=\frac{\delta^2-\omega^2}{c^2}\Phi-\frac{2\delta\omega}{c^2}\Psi,\\ \Delta\Psi&=\frac{\delta^2-\omega^2}{c^2}\Psi+\frac{2\delta\omega}{c^2}\Phi.\end{aligned} \qquad \text{(VII.5.4)}$$

Граничные условия (VII.5.2) приводят к уравнениям:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Phi}{\partial n}&=\rho\delta\varkappa\Phi-\rho\omega\varkappa\Psi,\\ \frac{\partial\Psi}{\partial n}&=\rho\delta\varkappa\Psi+\rho\omega\varkappa\Phi.\end{aligned} \qquad \text{(VII.5.5)}$$

Ограничимся приближением первого порядка. Иными словами, будем считать, что величины δ, $\varkappa$ и амплитуды функций Φ и $\Psi\ll 1$ (малы). В этом случае уравнения (VII.5.4) и (VII.5.5) приводятся к линейным:

$$\Delta\Phi+\frac{\omega^2}{c^2}\Phi=0,\quad \Delta\Psi+\frac{\omega^2}{c^2}\Psi=\frac{2\delta\omega}{c^2}\Phi, \qquad \text{(VII.5.6)}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}\approx 0,\quad \frac{\partial\Psi}{\partial n}\approx\rho\varkappa\omega\Phi. \qquad \text{(VII.5.7)}$$

Заменяя ω/c волновым числом k, получаем:

$$\Delta\Phi+k^2\Phi=0,\quad \Delta\Psi+k^2\Psi=\frac{2\delta k}{c}\Phi, \qquad \text{(VII.5.8)}$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial n}=0,\qquad \frac{\partial\Psi}{\partial n}=\rho c\varkappa k\Phi. \qquad \text{(VII.5.9)}$$

Для нахождения формул коэффициента затухания δ воспользуемся формулой Грина

$$\int\limits_V(\Phi\,\Delta\Psi-\Psi\,\Delta\Phi)\,dV=\oint\limits_S\left(\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial n}-\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial n}\right)dS. \qquad \text{(VII.5.10)}$$

С этой целью подставим в (VII.5.10) значения лапласианов и производных по нормали на поверхности. Тогда после преобразований найдем

$$2\delta=\rho c^2\frac{\oint\varkappa\Phi^2\,dS}{\int\limits_V\Phi^2\,dV}. \qquad \text{(VII.5.11)}$$

Известно, что волновые функции для прямоугольного помещения без учета затухания имеют вид

$$\Phi_{mnp} = A_{mnp} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cos \frac{p\pi z}{l_z}.$$

При наличии затухания на стенках эти функции должны быть дополнены экспоненциальным множителем. Таким образом, амплитуда отдельной плоской волны должна уменьшаться со временем по экспоненциальному закону с коэффициентом затухания δ_{mnp}:

$$\Phi_{mnp} = A_{mnp}\, \mathrm{e}^{-\delta_{mnp}t} \cos \frac{m\pi x}{l_x} \cos \frac{n\pi y}{l_y} \cos \frac{p\pi z}{l_z}.$$

Плотность энергии звукового поля пропорциональна квадрату амплитуды, поэтому $\mathscr{E}_{mnp} \sim \mathscr{E}_0 \mathrm{e}^{-2\delta_{mnp}t}$. Сопоставляя это выражение с формулой плотности энергии диффузного поля статистической теории (VII.2.10) $\left[\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \mathrm{e}^{-(\Sigma S_i \alpha_i)\frac{c}{4V}t}\right]$, получаем

$$\sum S_i \alpha_i \frac{c}{4V} = 2\delta_{mnp} = \rho c^2 \frac{\int \varkappa \Phi^2\, dS}{\int\limits_V \Phi^2\, dV}.$$

Отсюда коэффициент поглощения по волновой теории

$$<\alpha\, mnp> = \frac{1}{\Sigma S_i} \sum S_i \alpha_i = 2\delta_{mnp} \frac{4V}{c \Sigma S_i} = 4\rho c \frac{\frac{1}{\Sigma S_i} \oint \varkappa \Phi^2 dS}{\frac{1}{V} \int\limits_V \Phi^2\, dV}. \quad \text{(VII.5.12)}$$

Согласно статистической теории, коэффициент поглощения зависит только от свойств покрытия. Волновая теория показывает, что коэффициент поглощения поверхности зависит не только от физической природы материала, но и от типа волны.

Проведем вычисление коэффициента поглощения $<\alpha\, mnp>$ для трех видов волн.

Коэффициенты для x-, y- и z-осевых волн. Для x-осевой волны $\left(\Phi_{m00} = A_{m00} \cos \frac{m\pi x}{l_x}\right)$ предположим, что каждая стенка имеет известные значения проводимостей $\varkappa_{yl_y}$, $\varkappa_{x0}$, $\varkappa_{xl_x}$, $\varkappa_{y0}$, $\varkappa_{z0}$, $\varkappa_{zl_z}$. Обозначив площадки стенок S_{x0}, S_{xl_x}, S_{y0}, S_{yl_y}, S_{z0}, S_{zl_z}, получим [см. (VII.5.12)]:

$$\oint \varkappa \Phi^2\, dS = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} (\varkappa_{z0} + \varkappa_{zl_z})\, A^2_{m00} \cos^2 \frac{m\pi x}{l_x}\, dx\, dy + \int_0^{l_x} \int_0^{l_z} (\varkappa_{y0} + \varkappa_{yl_y})\, A^2_{m00} \times$$

$$\times \cos^2 \frac{m\pi x}{l_x}\, dx\, dz + \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} (\varkappa_{x0} + \varkappa_{xl_x})\, A^2_{m00} \cos^2 \frac{m\pi x}{l_x}\, dy\, dz,$$

$$\int\limits_V \Phi^2\, dV = \int_0^{l_x} \int_0^{l_y} \int_0^{l_z} A^2_{m00} \cos^2 \frac{m\pi x}{l_x}\, dx\, dy\, dz,$$

$$V = l_x l_y l_z, \quad S = \Sigma S_i = 2\,(l_x l_y + l_x l_z + l_y l_z).$$

Интегралы, входящие в выражения $\oint \varkappa\Phi^2\,dS$ и $\int\limits_V \Phi^2\,dV$, сводятся к типу

$$\int\limits_0^{\pi} \cos(k_1x)\cos(k_2x)\,dx=\begin{cases} 0, & \text{если } k_1\neq k_2,\\ \pi/2, & \text{если } k_1=k_2,\end{cases}$$

поэтому

$$\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y} (\varkappa_{z0}+\varkappa_{zl_z})\,A^2_{m00}\cos^2\frac{m\pi}{l_x}x\,dx\,dy=\frac{A^2_{m00}}{2}(\varkappa_{z0}+\varkappa_{zl_z})\,l_xl_y=$$

$$=\frac{A^2_{m00}}{2}(\bar\varkappa_{z0}+\bar\varkappa_{zl}),$$

$$\bar\varkappa_{z0}=\varkappa_{z0}l_xl_y,\quad \bar\varkappa_{zl}=\varkappa_{zl_z}l_xl_y.$$

Аналогично,

$$\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_z} (\varkappa_{y0}+\varkappa_{yl_y})\,A^2_{m00}\cos^2\frac{m\pi x}{l_x}\,dx\,dy=\frac{A^2_{m00}}{2}(\varkappa_{y0}+\varkappa_{yl_y})\,l_yl_z=$$

$$=\frac{A_{m00}}{2}(\bar\varkappa_{y0}+\bar\varkappa_{yl}).$$

Что касается третьего интеграла, то здесь надо брать значения $\cos(m\pi x/l_x)$ на стенках $x=0$ и $\varkappa=l_x$. В результате получаем:

$$A^2_{m00}\int\limits_0^{l_y}\int\limits_0^{l_z}\left(\varkappa_{x0}\cos^2\frac{m\pi 0}{l_x}+\varkappa_{xl_x}\cos^2\frac{m\pi l_x}{l_x}\right)dy\,dz=$$

$$=A^2_{m00}(\varkappa_{x0}+\varkappa_{xl_x})\,l_yl_z=A^2_{m00}(\bar\varkappa_{x0}+\bar\varkappa_{xl}),$$

$$\varkappa_{x0}=\varkappa_{x0}l_yl_z,\quad \varkappa_{xl}=\varkappa_{xl_x}l_yl_z.$$

Интеграл по объему, стоящий в знаменателе,

$$A^2_{m00}\int\limits_0^{l_x}\int\limits_0^{l_y}\int\limits_0^{l_z}\cos^2\frac{m\pi x}{l_x}\,dx\,dy\,dz=\frac{1}{2}A^2_{m00}\,l_xl_yl_z.$$

Таким образом,

$$<\alpha_{m00}>=\frac{8\rho c}{\Sigma S_i}\left(\frac{1}{2}\bar\varkappa_{x0}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{zl}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{y0}+\bar\varkappa_{xl}\right).$$

Каждая стенка вносит свой вклад в коэффициент поглощения. Этот вклад пропорционален полной проводимости стенки. Однако те стенки помещения, по которым скользит волновая поверхность, вызывают меньшее поглощение при равных проводимостях, чем те, на которые волновой фронт набегает прямо.

Можно было бы так же подробно произвести вычисление y- и z-осевых волн. Однако в этом нет необходимости, так как результат легко записать сразу:

$$<\alpha_{0n0}>=\frac{8\rho c}{\Sigma S_i}\left(\frac{1}{2}\bar\varkappa_{z0}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{zl}+\varkappa_{y0}+\bar\varkappa_{yl}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{x0}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{xl}\right),$$

$$<\alpha_{00p}>=\frac{8\rho c}{\Sigma S_i}\left(\bar\varkappa_{z0}+\bar\varkappa_{zl}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{y0}+\frac{1}{2}\bar\varkappa_{yl}\right),$$

где $\sum S_i$ — полная поверхность стен и потолков помещения; $\varkappa$ — проводимость стен.

Коэффициент поглощения для тангенциальных волн. В этом случае для волн следует вычислить коэффициенты·

$$A_{mn0}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y},\qquad A_{m0p}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{p\pi z}{c_z},$$
$$A_{0np}\cos\frac{n\pi y}{l_y}\cos\frac{p\pi z}{l_p}.$$

Двукратные интегралы в числителе (VII.5.12) дают:

$$A_{mn0}^2\left[\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\varkappa_{z0}+\varkappa_{zl_z})\cos^2\frac{m\pi x}{l_x}\cos^2\frac{n\pi y}{l_y}\,dx\,dy+\right.$$
$$+\int_0^{l_x}\int_0^{l_z}(\varkappa_{y0}+\varkappa_{yl_y})\cos^2\frac{m\pi x}{l_x}\cos^2\frac{n\pi y}{l_y}\,dx\,dz+$$
$$\left.+\int_0^{l_y}\int_0^{l_z}(\varkappa_{x0}+\varkappa_{xl_x})\,dy\,dz\cos^2\frac{m\pi x}{l_x}\cos^2\frac{n\pi x}{l_y}\,dy\,dz\right]=$$
$$=A_{mn0}^2\left[\frac{1}{2}\varkappa_{z0}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{zl}+\bar{\varkappa}_{y0}+\bar{\varkappa}_{yl}+\bar{\varkappa}_{y0}+\bar{\varkappa}_{yl}\right],$$
$$\iint\limits_S \Phi_{m0p}^2\varkappa\,dS=\frac{A_{m0p}^2}{2}\left(\bar{\varkappa}_{z0}+\bar{\varkappa}_{zl}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{y0}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{yl}+\right.$$
$$\left.+\bar{\varkappa}_{x0}+\bar{\varkappa}_{xl}\right)+\frac{A_{0np}^2}{2}\left(\bar{\varkappa}_{z0}+\bar{\varkappa}_{zl}+\bar{\varkappa}_{y0}+\bar{\varkappa}_{yl}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{x0}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{xl}\right).$$

Интеграл по объему для Φ_{mn0}-волны

$$\int_0^{l_x}\int_0^{l_y}\int_0^{l_z}A_{mn0}^2\cos^2\frac{m\pi x}{l_x}\cos^2\frac{n\pi y}{l_y}\,dx\,dy\,dz=\frac{l_xl_yl_z}{4}.$$

После определения всех элементов формулы (VII.5.10) нетрудно получить коэффициенты α для всех трех касательных волн:

$$\alpha_{mn0}=\frac{8\rho c}{\Sigma S}\left(\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{z0}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{zl}+\bar{\varkappa}_{y0}+\bar{\varkappa}_{yl}+\bar{\varkappa}_{x0}+\bar{\varkappa}_{xl}\right),$$
$$\alpha_{m0p}=\frac{8\rho c}{\Sigma S}\left(\bar{\varkappa}_{z0}+\bar{\varkappa}_{zl}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{y0}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{yl}+\bar{\varkappa}_{x0}+\bar{\varkappa}_{xl}\right),$$
$$\alpha_{0np}=\frac{8\rho c}{\Sigma S}\left(\bar{\varkappa}_{z0}+\bar{\varkappa}_{zl}+\bar{\varkappa}_{y0}+\bar{\varkappa}_{yl}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{x0}+\frac{1}{2}\bar{\varkappa}_{xl}\right).$$

Эффективность поглощения для тангенциальных волн отдельными поверхностями прямоугольного помещения зависит от ориентации волнового вектора по отношению к поверхности стены. Для тех поверхностей, где волновой вектор с нормалью к грани составляет угол 90°, эффективность поглощения вдвое меньше, чем для всех других.

Коэффициент поглощения для косых волн. Вычисление коэффициента поглощения для волн $\Phi_{mnp}=A_{mnp}\cos\frac{m\pi x}{l_x}\cos\frac{n\pi y}{l_y}\cos\frac{p\pi z}{l_z}$, косых по отношению к каждой из грани, приводит к следующему результату:

$$\alpha_{mnp}=\frac{8\rho c}{\Sigma S}(\bar{\varkappa}_{z0}+\bar{\varkappa}_{zl}+\bar{\varkappa}_{x0}+\bar{\varkappa}_{y0}+\bar{\varkappa}_{xl}).$$

Время реверберации для волн в прямоугольном помещении. Выражение (VII.5.12) дает коэффициент поглощения для единицы площади поверхности. Чтобы найти время реверберации, необходимо знать полный коэффициент поглощения для того или иного типа волн. При наличии поглощения плотность энергии звукового поля уменьшается по закону $\mathscr{E}_{mnp}=\mathscr{E}_0 e^{-2\delta_{mnp}t}$, отсюда следует, что стандартное время реверберации удовлетворяет уравнению

$$60=10\lg\frac{\mathscr{E}_0}{\mathscr{E}_{mnp}}=20\delta_{mnp}t\lg e=4{,}34\cdot 2\delta_{mnp}t$$

и определяется формулой

$$t_{60}=\frac{60}{4{,}34\cdot 2\delta_{mnp}}.$$

Согласно (VII.5.12),

$$2\delta_{mnp}=\bar{\alpha}_{mnp}\frac{c\Sigma S}{4V},$$

откуда

$$t=\frac{60\cdot 4V}{4{,}34\cdot c\bar{\alpha}_{mnp}\Sigma S}=\frac{0{,}162}{\bar{\alpha}_{mnp}\Sigma S}. \tag{VII.5.13}$$

Время реверберации для различных типов стоячих волн выражается формулами:

$$\begin{aligned} t_{60}^{m00}&=\frac{0{,}162V}{8\rho c\,(\varkappa_{z0}/2+\varkappa_{zl}/2+\varkappa_{y0}/2+\varkappa_{yl}/2+\varkappa_{x0}+\varkappa_{xl})},\\ t_{60}^{mn0}&=\frac{0{,}162V}{8\rho c\,(\varkappa_{z0}/2+\varkappa_{zl}/2+\varkappa_{y0}+\varkappa_{yl}+\varkappa_{x0}+\varkappa_{xl})},\\ t_{60}^{mnp}&=\frac{0{,}162V}{8\rho c\,(\varkappa_{z0}+\varkappa_{zl}+\varkappa_{y0}+\varkappa_{yl}+\varkappa_{x0}+\varkappa_{xl})}.\end{aligned} \tag{VII.5.14}$$

Они показывают, что если границы помещения вносят в поглощение энергии равный вклад, т. е. проводимости всех стен примерно одинаковы, то затухание будет наибольшим для косых волн. Меньшее затухание свойственно касательным и осевым волнам. Случай косых волн соответствует диффузному полю. Формула времени реверберации для этих волн совпадает с классической формулой Сэбина.

При низких частотах, где небольшое изменение частоты может вызывать резонансы на соседних формах колебаний, наблюдается резкое изменение времени реверберации в зависимости от изменения частоты. На средних частотах кривая уровня интенсивности может иметь изломы и отклонения от прямой: сначала кривая спадает быстро (действие осевых волн); при высоких частотах, когда плотность спектра высока и преобладающая роль в затухании принадлежит косым стоячим волнам, затухание звука в широком диапазоне уровней (≈ 30 дБ) имеет логарифмический характер.