ГЛАВА VIII

ПОГЛОЩЕНИЕ ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ЖИДКОСТЯХ И ГАЗАХ

§ VIII.1. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГИДРОДИНАМИКИ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

Поток импульса идеальной жидкости. Для изучения затуханий волн в вязких и теплопроводных жидкостях необходимо напомнить некоторые законы гидродинамики.

Допустим, что имеется поток идеальной жидкости. Обозначим в элементе объема dV плотность через ρ, скорость через $\mathbf{v}$. Весь объем жидкости, ограниченный проницаемой поверхностью f, имеет импульс, определяемый интегралом по объему: $\int\limits_{V_0} \rho \mathbf{v} dV$.

Найдем изменение импульса в единицу времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V_0} \rho v_i dV.$$

Поскольку объем V_0 не изменяется, то производную по времени можно внести под знак интеграла $\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i dV = \int \frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i)\, dV$. Частная производная по времени от плотности импульса ρv_i с помощью уравнений непрерывности и Эйлера преобразуется к виду

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i v_k + p). \tag{VIII.1.1}$$

Скалярную величину p можно представить в форме тензора второго ранга, если воспользоваться понятием единичного тензора:

$$\delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k. \end{cases}$$

Очевидно, $p_{ik} = p\delta_{ik}$. Такое представление позволяет записать величину, заключенную в скобки правой части выражения (VIII.1.1) в форме тензора второго ранга:

$$\varPi_{ik} = \rho v_i v_k + p\delta_{ik} = \begin{pmatrix} \rho v_1^2 + p & \rho v_1 v_2 & \rho v_1 v_3 \\ \rho v_2 v_1 & \rho v_2^2 + p & \rho v_2 v_3 \\ \rho v_3 v_1 & \rho v_3 v_2 & \rho v_3^2 + p \end{pmatrix}. \tag{VIII.1.2}$$

После введения тензора $\varPi_{ik}$ найдем изменение импульса в единицу времени:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{V} \rho v_i dV = -\int\limits_{V} \frac{\partial \varPi_{ik}}{\partial x_i} dV.$$

Согласно теореме Остроградского — Гаусса, объемный интеграл вида $\int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ik} dV$ преобразуется в интеграл по поверхности:

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_i} \Pi_{ik} dV = \oint\limits_f \Pi_{ik} n_k df.$$

Таким образом, изменение импульса жидкости

$$\frac{\partial}{\partial t} \int\limits_V \rho v_i dV = - \oint\limits_f \Pi_{ik} n_k df. \qquad \text{(VIII.1.3)}$$

Уравнение (VIII.1.3) выражает *закон сохранения импульса:* изменение в единицу времени импульса в замкнутом объеме равно полному потоку импульса через поверхность, охватывающую объем. Величину Π_{ik} называют *тензором потока импульса.* Из уравнения (VIII.1.3) следует одна из форм уравнения Эйлера:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = - \frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}. \qquad \text{(VIII.1.4)}$$

Разумеется, уравнение Эйлера, взятое в форме

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = - \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

или

$$\rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{\partial p}{\partial x_i},$$

можно выразить в виде (VIII.1.4), если представить $\rho \frac{\partial v_i}{\partial t}$ как $\frac{\partial (\rho v_i)}{\partial t} - v_i \frac{\partial \rho}{\partial t}$, а вместо $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ подставить ее выражение из уравнения непрерывности.

Внутреннее трение. Между слоями жидкости, движущимися с различными скоростями, возникают силы внутреннего трения. Согласно закону, установленному Ньютоном для некоторых жидкостей, сила внутреннего трения между слоями пропорциональна разности скоростей, площади соприкосновения слоев и обратно пропорциональна расстоянию между слоями:

$$\Delta F = \eta \frac{v_2 - v_1}{n_2 - n_1} \Delta f,$$

или

$$\Delta F = \eta \frac{\partial v}{\partial n} \Delta f. \qquad \text{(VIII.1.5)}$$

Силы вязкого трения тангенциальны. Они не связаны с изменением объема. По аналогии с этими силами можно предположить существование объемных сил неупругого характера — объемных сил внутреннего трения, которые должны быть пропорциональными скорости изменения объема:

$$\Delta F_{\text{об}} = \xi \operatorname{div} \mathbf{v} = \xi \frac{1}{V} \frac{\partial V}{\partial t}.$$

Коэффициент пропорциональности ξ называют *объемной вязкостью* или *второй вязкостью*. Объемная вязкость имеет ту же размерность, что и сдвиговая.

Тензор вязких напряжений. Для того чтобы написать уравнение движения вязкой жидкости, достаточно дополнить уравнение (VIII.1.4) силами вязкого трения и представить его в виде

$$\frac{\partial (v_i\rho)}{\partial t}+\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}=\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \text{(VIII.1.6)}$$

где σ_{ik} — тензор вязких напряжений.

Можно показать, что наиболее общим выражением для тензора вязких напряжений, содержащим как сдвиговую, так и объемную вязкости, является формула

$$\sigma_{ik}=\eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{\partial v_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)+\xi\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}, \qquad \text{(VIII.1.7)}$$

где

$$\delta_{ik}=\begin{cases}0 & \text{при } i\neq k,\\ 1 & \text{при } i=k.\end{cases}$$

Здесь первое слагаемое содержит только компоненты тензора, для которых $i\neq k$. При $i=k$ это слагаемое обращается в нуль. Второе слагаемое содержит только компоненты тензора σ_{ii}. Оно выражает эффекты внутреннего трения за счет объемной вязкости.

Проведем дифференцирование (VIII.1.7) по x_k и, замечая, что по правилам замены повторяющихся индексов $\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k \partial x_i}=\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_l \partial x_i}$, получим

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}=\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\left(\frac{1}{3}\eta+\xi\right)\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_l \partial x_i}.$$

Подставляя это выражение в (VIII.1.6), найдем уравнение движения вязкой жидкости:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\left(\frac{1}{3}\eta+\xi\right)\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_l \partial x_i}. \qquad \text{(VIII.1.8)}$$

Для случая, когда $\partial v_l/\partial x_l=0$, из (VIII.1.8) получаем уравнение Навье — Стокса

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+v_k\frac{\partial v_i}{\partial x_k}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}=\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}. \qquad \text{(VIII.1.9)}$$

Если $p-p_0=p'$, $\rho-\rho_0=\rho'$ и v_i — величины первого порядка малости, то уравнение (VIII.1.8) для этих функций после отбрасывания членов второго порядка приводится к линейному относительно p', ρ', v_i:

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}+\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial p'}{\partial x_i}=\eta\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2}+\left(\frac{1}{3}\eta+\xi\right)\frac{\partial^2 v_l}{\partial x_l \partial x_i}. \qquad \text{(VIII.1.10)}$$

Это выражение называют *акустическим уравнением движения вязкой жидкости.*

Полная система уравнений вязкой жидкости в акустическом приближении состоит из уравнений движения (VIII.1.8), уравнения непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$, одного из уравнений состояния

$$\rho = \frac{1}{c^2} p \quad \text{или} \quad T = \frac{T_0 \alpha^V p}{\rho c_p} \qquad \text{(VIII.1.11)}$$

и уравнения энергии с учетом необратимых потерь.

Диссипация механической энергии. Распространение упругих волн в реальных жидкостях и газах следует представлять как некоторый неравновесный процесс. Согласно основным положениям термодинамики, механическая энергия термодинамической системы равна максимальной работе, которую можно получить при переходе системы из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия с первоначальной энтропией:

$$U_{\text{мех}} = U_0 - U(S),$$

где U_0 — начальная внутренняя энергия системы, находящейся в неравновесном состоянии; $U(S)$ — энергия системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с той же энтропией.

Скорость уменьшения механической энергии, т. е. диссипация энергии, определяют производной механической энергии по времени

$$\dot{U}_{\text{мех}} = -\dot{U}(S) = -\frac{\partial U}{\partial S} \dot{S}.$$

Заменяя $\partial U/\partial S = T_0$, получаем $\dot{U}_{\text{мех}} = -T_0 \dot{S}$. Воспользуемся формулой изменения энтропии системы [1]

$$\dot{S} = \int_V \varkappa \frac{(\Delta T)^2}{T^2} dV + \int_V \frac{\eta}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ik} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right) dV + \int_V \frac{\xi}{T} \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV$$

и получим общее выражение диссипации механической энергии:

$$\dot{U}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T_0} \int_V (\nabla T)^2 dV - \eta \int_V \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right) dV - \xi \int_V \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l} \right)^2 dV, \qquad \text{(VIII.1.12)}$$

где η и ξ — сдвиговая и объемная вязкости; x_i ($x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$).

§ VIII.2. ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ ВОЛН В ВЯЗКИХ И ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Допустим, что в жидкости распространяется плоская волна в направлении оси x ($x_1 = x$):

$$v_1 = v_x = v_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} t\right) e^{-\delta t}, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$