Полная система уравнений вязкой жидкости в акустическом приближении состоит из уравнений движения (VIII.1.8), уравнения непрерывности $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$, одного из уравнений состояния

$$\rho = \frac{1}{c^2} p \quad \text{или} \quad T = \frac{T_0 \alpha^V p}{\rho c_p} \tag{VIII.1.11}$$

и уравнения энергии с учетом необратимых потерь.

Диссипация механической энергии. Распространение упругих волн в реальных жидкостях и газах следует представлять как некоторый неравновесный процесс. Согласно основным положениям термодинамики, механическая энергия термодинамической системы равна максимальной работе, которую можно получить при переходе системы из данного неравновесного состояния в состояние термодинамического равновесия с первоначальной энтропией:

$$U_{\text{мех}} = U_0 - U(S),$$

где U_0 — начальная внутренняя энергия системы, находящейся в неравновесном состоянии; $U(S)$ — энергия системы, находящейся в состоянии термодинамического равновесия с той же энтропией.

Скорость уменьшения механической энергии, т. е. диссипация энергии, определяют производной механической энергии по времени

$$\dot{U}_{\text{мех}} = -\dot{U}(S) = -\frac{\partial U}{\partial S}\dot{S}.$$

Заменяя $\partial U/\partial S = T_0$, получаем $\dot{U}_{\text{мех}} = -T_0 \dot{S}$. Воспользуемся формулой изменения энтропии системы [1]

$$\dot{S} = \int\limits_V \varkappa \frac{(\Delta T)^2}{T^2} dV + \int\limits_V \frac{\eta}{T} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right) dV + \int\limits_V \frac{\xi}{T}\left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV$$

и получим общее выражение диссипации механической энергии:

$$\dot{U}_{\text{мех}} = -\frac{\varkappa}{T_0}\int\limits_V (\nabla T)^2 dV - \eta \int\limits_V \frac{\partial v_i}{\partial x_k}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\delta_{ik}\right) dV - {}$$
$$- \xi \int\limits_V \left(\frac{\partial v_l}{\partial x_l}\right)^2 dV, \tag{VIII.1.12}$$

где η и ξ — сдвиговая и объемная вязкости; x_i ($x_1 = x$; $x_2 = y$; $x_3 = z$).

§ VIII.2. ПОГЛОЩЕНИЕ ЭНЕРГИИ УПРУГИХ ВОЛН В ВЯЗКИХ И ТЕПЛОПРОВОДНЫХ ЖИДКОСТЯХ

Допустим, что в жидкости распространяется плоская волна в направлении оси x ($x_1 = x$):

$$v_1 = v_x = v_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c} t\right) e^{-\delta t}, \quad v_2 = 0, \quad v_3 = 0.$$

При подстановке компонент скорости плоской волны в формулу (VIII.1.12) получим для членов с коэффициентами η и ξ выражение

$$-\left(\frac{4}{3}\eta+\xi\right)\int\limits_V\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}\right)^2 dV=$$

$$=-\left(\frac{4}{3}\eta+\xi\right)\frac{\omega^2}{c^2}\int\limits_V v_0^2\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}t\right)dV. \qquad \text{(VIII.2.1)}$$

Первый член (VIII.1.12) соответствует диссипации энергии за счет теплопроводности, определяемой градиентом температуры ∇T.

Найдем ∇T для плоской волны. С этой целью преобразования ∇T для плоской волны воспользуемся линейным уравнением состояния

$$T'=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s p'=\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s \rho c v_x.$$

Используя термодинамическое соотношение $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s=\frac{T}{c}\alpha^v\frac{1}{\rho}$, находим $T'=T\alpha^v c v_x/c_p$. Подставив выражение для скорости колебаний частиц $v_x=v\cos(\omega t-\omega x/c)$, получим

$$T'=\frac{T_0\alpha^v c}{c_p}v_0\cos\left(\omega t-\frac{\omega}{c}x\right).$$

Отсюда градиент температуры в плоской волне

$$\nabla T=\nabla T'=\frac{\partial T'}{\partial x}=\frac{T_0\alpha^v\omega}{c_p}v_0\sin\left(\omega t-\frac{\omega}{c}x\right).$$

Таким образом, первый член в (VIII.1.12) имеет вид

$$-\frac{\varkappa}{T_0}\int\limits_V(\nabla T)^2 dV=-\varkappa\int\limits_V\sin^2\left(\omega t-\frac{\omega}{c_p}x\right)dV\,\frac{T_0\alpha^{(v)^2}\omega^2}{c_p^2}v_0^2.$$

Воспользовавшись (VIII.2.1) и (VIII.2.1′), получим формулу диссипации механической энергии, которая определяет рассеяние энергии плоской волны при наличии теплопроводности и вязкости:

$$U_{\text{мех}}=-\left[\varkappa\frac{T_0\alpha^{(v)^2}\omega^2}{c_p^2}+\left(\frac{4}{3}\eta+\xi\right)\frac{\omega^2}{c^2}\right]v_0^2\int\limits_V\sin^2\left(\omega t-\frac{x}{c}\omega\right)dV. \qquad \text{(VIII.2.2)}$$

Среднее значение $\langle\dot U_{\text{мех}}\rangle$ по периоду $2\pi/\omega$ равно

$$\langle\dot U_{\text{мех}}\rangle=-\left[\left(\frac{4}{3}\eta+\xi\right)+\varkappa T_0\frac{\alpha^{(v)^2}c^2}{c_p^2}\right]\frac{\omega^2}{c^2}v_0V_0. \qquad \text{(VIII.2.3)}$$

Среднее значение механической энергии

$$\langle U_{\text{мех}}\rangle=\frac{\rho v_0^2}{2}V_0.$$

После указанных преобразований нетрудно найти формулу коэффициента поглощения упругих волн для вязкой и теплопроводной жидкости:

$$\alpha = \frac{\langle U_{\text{мех}} \rangle}{2c\,\langle U_{\text{мех}} \rangle} = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left(\frac{4}{3}\eta + \xi + \varkappa \frac{T\alpha^{(v)^2} c^2}{c_p^2}\right). \qquad \text{(VIII.2.4)}$$

Из этого выражения следует, что в реальных жидкостях полный коэффициент поглощения α упругих волн состоит из суммы коэффициентов поглощения, определяемых сдвиговой вязкостью

$$\alpha_\eta = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\frac{4}{3}\eta, \qquad \text{(VIII.2.5)}$$

теплопроводностью жидкости

$$\alpha_\varkappa = \frac{\omega^2}{2\rho c} T_0 \left(\frac{\alpha^{(v)}}{c_p}\right)^2 \varkappa \qquad \text{(VIII.2.6)}$$

и второй вязкостью

$$\alpha_\xi = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\xi. \qquad \text{(VIII.2.7)}$$

Формулу для коэффициента поглощения $\alpha_\varkappa$ обычно записывают в ином виде. На основании термодинамических соотношений

$$\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S = \frac{c_p}{c_v}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T = c^2, \quad c_p - c_v = T_0 \alpha^{(v)^2}\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_T$$

можно показать, что выполняется следующее тождество:

$$T_0 c^2 \left(\frac{\alpha^{(v)}}{c_p}\right)^2 = \frac{c_p - c_v}{c_p c_v} = \left(\frac{1}{c_V} - \frac{1}{c_p}\right).$$

Отсюда получаем $\alpha_\varkappa = \frac{\omega^2 \varkappa}{2\rho c^3}\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)$,

$$\alpha_{\text{кл}} = \alpha_\eta + \alpha_\varkappa = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\left[\frac{4}{3}\eta + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right]. \qquad \text{(VIII.2.8)}$$

Коэффициент поглощения α_η (VIII.2.5) впервые был выведен Стоксом из уравнений гидродинамики вязкой жидкости. Коэффициент $\alpha_\varkappa$ (VIII.2.6) получен Кирхгофом. Поэтому формулу коэффициента поглощения с учетом вязкости и теплопроводности называют *формулой Стокса — Кирхгофа.*

В современной акустике принято приписывать действию объемной вязкости все избыточное поглощение, т. е. $\alpha_{\text{экс}} - \alpha_{\text{кл}}$.

Коэффициент объемной вязкости входит в формулу диссипации энергии:

$$\xi = \frac{|\langle \dot{U}_{\text{мех}} \rangle|_{x=h=0}}{\int\limits_V (\operatorname{div} v)^2\, dV}. \qquad \text{(VIII.2.9)}$$

Следовательно, коэффициент объемной вязкости ξ появляется только в таких процессах, для которых $\operatorname{div} v \neq 0$, т. е. скорость изменения удельного объема жидкости не равна нулю. В обычных гидродинамических процессах жидкость считается несжимаемой, поэтому коэффициент объемной вязкости в уравнения обычной гидродинамики не входит. Этим можно объяснить то обстоятельство, что не существует прямых методов измерения коэффициента объемной вязкости. Единственный способ определения ξ имеет косвенный характер. Этот способ основан на гипотезе, согласно которой разность между измеренным коэффициентом поглощения и вычисленным по классической формуле равна коэффициенту поглощения за счет объемной вязкости:

$$\alpha_{\text{экс}} - \alpha_{\text{кл}} = \frac{\omega^2}{2\rho c^3}\xi.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{2\rho c^3}{\omega^2}(\alpha_{\text{экс}} - \alpha_{\text{кл}}). \tag{VIII.2.10}$$

Различные вещества имеют различное отношение $\alpha_\eta/\alpha_\varkappa$. Однако анализ, произведенный на основании использования таблиц термодинамических параметров веществ, показывает, что для жидкостей коэффициентом поглощения $\alpha_\varkappa$ можно пренебречь. Исключение составляют металлические жидкости.

§ VIII.3. СРАВНЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ С ЭКСПЕРИМЕНТОМ

Согласно классической теории поглощения, отношение коэффициента поглощения к квадрату частоты для всех жидкостей и газов не зависит от частоты и является функцией физических параметров жидкости. Многочисленные измерения коэффициента поглощения жидкостей и газов в широком диапазоне частот, давлений и температур показали, что классическая теория не укладывается в рамки результатов эксперимента [14, 15].

Поглощение ультразвуковых волн в газах впервые измерено русским ученым Неклепаевым. Им было обнаружено, что при частоте 400 кГц коэффициент поглощения звука в воздухе значительно больше, чем следует по классической теории. Позже коэффициент поглощения в газах был измерен многими другими учеными. Во всех случаях коэффициент поглощения в газах превышает значение, полученное из вычислений по классической теории. Кроме того, для газов отношение α/ν^2 не остается постоянным, а имеет характерную зависимость от частоты.

Коэффициент поглощения (VIII.2.4) в классической теории полезно представить в виде произведения коэффициента поглощения на длину волны:

$$\alpha\lambda = \alpha\frac{c}{\nu} = \frac{4\pi^2\nu}{2\rho c^2}\left[\frac{4}{3}\eta + \xi + \varkappa\left(\frac{1}{c_v} - \frac{1}{c_p}\right)\right].$$

Поскольку для газов $c^2 = \dfrac{c_p}{c_v}\dfrac{p_0}{\rho}$, то

$$\alpha\lambda = \frac{2\pi^2}{c_p/c_v}\frac{\nu}{p_0}\left[\frac{4}{3}\eta + \xi + \varkappa\left(\frac{1}{d_v} - \frac{1}{c_v}\right)\right]. \tag{VIII.3.1}$$

Формула (VIII.3.1) показывает, что коэффициент поглощения на длину волны $\alpha\lambda$ пропорционален ν/p_0. Однако эксперимент этого не подтверждает. Измерения, выполненные для многоатомных газов, показывают, что существует область частот, для которой коэффициент