соотношения:

$$\omega_0=\frac{c_v^{(0)}}{c_v^{(\infty)}}\frac{K_s^{(\infty)}}{K_s^{(0)}}\omega_0,\quad \nu_0=\frac{K_s^{(\infty)}}{K_s^{(0)}}\frac{c_p^{(0)}}{c_p^{(\infty)}}\nu_0', \tag{VIII.6.10}$$

где $c_v^{(\infty)}$, $c_p^{(\infty)}$ и $K_s^{(\infty)}$ — теплоемкости и адиабатический модуль упругости при высоких частотах ($\omega \gg \omega_0$); $c_v^{(0)}$, $c_p^{(0)}$ и $K_s^{(0)}$ — теплоемкости и адиабатический модуль упругости при низких частотах ($\omega \ll \omega_0$).

При распространении звука параметр $\zeta^{(l)}$ периодически изменяется около своего среднего значения. То же самое относится и к неравновесному значению этого параметра. Изменения ζ и $\zeta^{(l)}$ выражают формулами:

$$\delta\zeta=\delta\zeta_0 e^{-j\omega t},\quad \delta\zeta^l=\delta\zeta^{(l)} e^{-j\omega t}. \tag{VIII.6.11}$$

Подставляя эти выражения в линейное уравнение релаксации (VIII.6.6), получаем

$$\delta\zeta_0=\frac{\delta\zeta_0^{(l)}}{1+j\omega\tau_{x,\,y}}, \tag{VIII.6.12}$$

т. е. между $\delta\zeta_0^{(l)}$ и $\delta\zeta_0$ имеется сдвиг фаз, определяемый произведением частоты колебаний и времени релаксации $\tau_{x,\,y}$.

§ VIII.7. РЕЛАКСАЦИЯ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН

Основные свойства чистых жидкостей определяют следующими термодинамическими величинами:

1) изотермическим и адиабатическим модулями упругости

$$K_s=\rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s,\quad K_T=\rho_0\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_T; \tag{VIII.7.1}$$

2) теплоемкостями при постоянном объеме и постоянном давлении

$$c_v=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v,\quad c_p=\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_p; \tag{VIII.7.2}$$

3) термическими коэффициентами объема и давления

$$\alpha^{(v)}=\frac{1}{v}\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p,\quad \alpha^{(p)}=\frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v; \tag{VIII.7.3}$$

4) коэффициентами сдвиговой и объемной вязкости

$$\eta=\frac{F_y}{\partial v_y/\partial x},\quad \xi=-\frac{\partial p-\partial p^{(l)}}{\operatorname{div}\mathbf{v}}=-\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_S-\left(\frac{\partial p^{(l)}}{\partial\rho}\right)_S\right]\frac{\delta\rho}{\operatorname{div}\mathbf{v}}; \tag{VIII.7.4}$$

5) коэффициентом теплопроводности

$$\varkappa=\frac{\delta Q}{\partial T/\partial x}. \tag{VIII.7.5}$$

Исследуем эти величины с точки зрения неравновесной термодинамики.

Поскольку независимые переменные являются функциями параметра неравновесности ζ, то каждый из перечисленных коэффициентов может иметь как равновесные, так и неравновесные значения. Неравновесные значения указанных величин соответствуют процессам, протекающим в условиях нарушенного статистического равновесия; их будем обозначать обычными символами этих величин, равновесные — индексом, поставленным вверху справа от символа, обозначающего ту или иную величину. Например, неравновесное значение адиабатического модуля обозначим K_s, равновесное $K_s^{(l)}$.

Найдем формулу объемной вязкости для периодического процесса изменения плотности:

$$\rho(t) = \rho_0 + \delta\rho e^{j\omega t}.$$

Из уравнения непрерывности $\partial\rho/\partial t + \rho_0 \operatorname{div} v = 0$ получаем

$$j\omega\delta\rho = -\rho_0 \operatorname{div} \mathbf{v}$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -j\omega \frac{\delta\rho}{\rho_0}. \qquad \text{(VIII.7.6)}$$

Тогда с учетом (VIII.7.6) приводим (VIII.7.4) к виду

$$\xi = -\left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s - \left(\frac{\partial p^{(l)}}{\partial\rho}\right)_s\right]\frac{\delta\rho}{\operatorname{div}\mathbf{v}} = \left[\left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s - \left(\frac{\partial p}{\partial\rho}\right)_s\right]\frac{\rho_0}{j\omega}.$$

Принимая во внимание (VIII.7.1), получаем

$$\xi = \left[K_s - K_s^{(l)}\right]\frac{1}{j\omega}. \qquad \text{(VIII.7.7)}$$

Таким образом, коэффициент объемной вязкости ξ равен нулю, если $K_s = K_s^{(l)}$, т. е. при равновесных процессах.

Термодинамические коэффициенты определяются первыми производными от термодинамических сил или потенциалов по термодинамическим координатам. Поскольку термодинамические координаты являются функциями параметра ζ, то

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y,\,\zeta} + \left(\frac{\partial X}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial x}\right)_y.$$

Воспользовавшись (VIII.6.12), получим

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y = \left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y,\,\zeta} + \frac{\partial X}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta_0^{(l)}}{\partial x}\frac{1}{1+j\omega\tau}.$$

После алгебраического преобразования производная $(\partial X/\partial x)_y$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y = \frac{1}{1+j\omega\tau}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y,\,\zeta} + \frac{\partial X}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta_0^{(l)}}{\partial x} + j\omega\tau\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y,\,\zeta}\right].$$

Сумма двух первых членов выражает полную производную X с учетом равновесного значения параметра $\zeta = \zeta_0^{(l)}$. Обозначим эту величину $(\partial X/\partial x)_y^0$.

Производная от обобщенной термодинамической силы X, взятая при постоянных значениях координаты y и параметра ζ, соответствует тому числовому ее значению в акустической волне, которая может наблюдаться при мгновенных изменениях состояния, т. е. при бесконечно больших частотах. Обозначим эту производную при помощи символа ∞:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_{y,\,\zeta}=\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y^{(\infty)}.$$

Таким образом, дифференцирование термодинамической величины X по независимой переменной с учетом параметра неравновесности приводит к следующему комплексному выражению:

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y=\frac{1}{1+j\omega\tau_{x,\,y}}\left[\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y^{(0)}+j\omega\tau_{x,\,y}\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y^{(\infty)}\right].\qquad\text{(VIII.7.8)}$$

Далее, назовем величину $\Omega=1/\tau_{x,\,y}$ частотой релаксации при условии, когда восстановление равновесия происходит при постоянных значениях независимых переменных x и y. В этом случае $\omega\tau_{x,\,y}=\omega/\Omega$ представляет собой безразмерную частоту колебаний. Кроме того, введем безразмерную величину $\frac{(\partial X/\partial x)_y^{(\infty)}}{(\partial X/\partial x)_y^{(0)}}=n$ и преобразуем (VIII.7.8) к виду

$$\left(\frac{\partial X}{\partial x}\right)_y=\frac{(\partial X/\partial x)_y^{(0)}}{1+jm}(1+jmn).\qquad\text{(VIII.7.9)}$$

Выражение (VIII.7.9) является математической формулировкой закона релаксации производной обобщенной силы по независимой переменной x при постоянной другой независимой переменной.

Разумеется, производные $(\partial X/\partial x)_y$, $(\partial X/\partial x)_y^0$ и n можно записать, используя обобщенный термодинамический потенциал L:

$$dL(x,\,y,\,\zeta)=-X\,dx-Y\,dy-\Psi\,d\zeta,$$

где $X=-(dL/dx)_{y,\,\zeta}$; $Y=-(\partial L/\partial y)_{x,\,\zeta}$; $\Psi=-(\partial L/\partial\zeta)_{x,\,y}$.

Следовательно, равновесная производная $(\partial X/\partial x)_y^0$ и относительное значение мгновенной производной n выражаются вторыми производными от термодинамического потенциала. Формулу производной по независимой переменной можно применить в случае, если в качестве функции X взять любую термодинамическую функцию независимых переменных x, y и ζ. В частности, ее можно записать для обобщенного термодинамического потенциала:

$$\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right)_y=\frac{(\partial L/\partial x)_y^{(0)}}{1+jm}(1+jmn),\qquad\text{(VIII.7.10)}$$

где $n=\frac{(\partial L/\partial x)_y^{(\infty)}}{(\partial L/\partial x)_y^{0}}$.

Применим (VIII.7.9) для вывода частотной зависимости комплексных упругих модулей, теплоемкостей и термических коэффициентов в веществе, имеющем частоту релаксации ω_{0s}.

Комплексный адиабатический модуль упругости получают из (VIII.7.9) при замене обобщенной силы X давлением p, обобщенной координаты x плотностью ρ, обобщенной координаты y энтропией s:

$$K_s^* = K_s^{(0)} \frac{1+jmn}{1+jm}, \qquad \text{(VIII.7.11)}$$

где $m = \omega/\omega_{0s}$ — частота звуковой волны, отнесенная к частоте релаксации; $n = K_s^{(\infty)}/K_s^{(0)}$ — отношение мгновенного модуля к модулю равновесного процесса.

Аналогично получаем формулу для комплексного изотермического модуля упругости:

$$K_T^* = K_T^{(0)} \frac{1+jmn}{1+jm}.$$

Здесь $m = \omega/\omega_{0T}$ и $n = K_T^{(\infty)}/K_T^0$.

Преобразуем коэффициент объемной вязкости (VIII.7.7) с помощью выражения (VIII.7.11):

$$\xi^* = \frac{\tau K_s^{(0)}(n-1)}{1+jm}, \qquad \text{(VIII.7.12)}$$

где $m = \omega/\omega_0$; $n = K_s^{(\infty)}/K_s^{(0)} = c_\infty^2/c_0^2$.

Подобно получаем формулы комплексной теплоемкости при постоянном объеме и постоянном давлении:

$$c_v^* = c_v^{(0)} \frac{1+jmn}{1+jm} \qquad \text{(VIII.7.13)}$$

$$\left(n = c_v^{(\infty)}/c_v^{(0)}, \quad m = \omega/\omega_0'\right);$$

$$c_p^* = \frac{c_p^{(0)}(1+jmn)}{1+jm}$$

$$\left(n = c_p^{(\infty)}/c_p^{(0)}, \quad m = \omega/\nu_0'\right).$$

Точно так же получают комплексные выражения для коэффициента объемного расширения и термического коэффициента давления:

$$\alpha^{(v)*} = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial\rho}{\partial T}\right)_p = \alpha_0^{(v)}\left(\frac{n-1}{1+jm}\right)$$

$$\left(n = \alpha_\infty^v/\alpha_0^v, \quad m = \frac{\omega}{\nu_0'}\right);$$

$$\alpha^{(p)*} = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_\rho = \alpha_0^{(p)}\left(\frac{n-1}{1+jm}\right)$$

$$\left(n = \alpha_\infty^{(p)}/\alpha_0^{(p)}, \quad m = \omega/\omega_0'\right).$$

§ VIII.8. ЗАВИСИМОСТЬ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ ВЕЛИЧИН ОТ ЧАСТОТЫ

Для выяснения физического смысла действительной и мнимой частей модулей и термических коэффициентов необходимо вспомнить назначение этих величин.

Модуль упругости дает первое приближение для вычисления дополнительного давления в случае, если плотность получает неболь-