ГЛАВА IX

РАСПРОСТРАНЕНИЕ УПРУГИХ ВОЛН В ТВЕРДЫХ ТЕЛАХ

§ IX.1. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Тензор деформации. Пусть в результате деформации две фиксированные материальные точки тела сместятся из положения AB в $A'B'$. Если координаты точек A и A' обозначить соответственно x_i и x'_i, а координаты точек B и B' — x_i+dx_i и $x'_i+dx'_i$, то расстояние между материальными точками после деформаций

$$dl'^2 = dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,dx_k\right)^2.$$

После возведения в квадрат этого выражения получаем

$$dl'^2 = dx_i^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,dx_i\,dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\,\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\,dx_i\,dx_k =$$

$$= dx_i^2 + \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\,\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) dx_i\,dx_k.$$

Обозначим

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_l}\,\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\,dx_i\,dx_k = 2u_{ik},$$

где u_{ik} — тензор второго ранга; $\partial u_i/\partial x_k$ — относительная деформация по направлению координаты i в отношении dx_k, ориентированной в направлении координаты k. Например, производная $\partial u_x/\partial x$ есть величина относительного удлинения в направлении оси X; $\partial u_x/\partial y$ — сдвиговая деформация в направлении оси X по отношению к расстоянию dy, и т. д. Для малых деформаций члены с произведением $\partial u_i/\partial x_l$, $\partial u_l/\partial x_k$ являются величинами второго порядка, поэтому ими пренебрегают.

Таким образом, формула тензора деформации в линейной теории упругости имеет вид

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right). \tag{IX.1.1}$$

Он обладает свойством, согласно которому $u_{ik}=u_{ki}$, т. е. компоненты этого тензора симметричны относительно диагональных членов.

В линейном приближении расстояние между точками деформированного тела составляет

$$dl' = \sqrt{dl^2 + 2u_{ik}\,dx_i\,dx_k}. \tag{IX.1.2}$$

Из физических соображений следует, что расстояние между точками не зависит от выбранной системы координат. Можно найти такую прямоугольную систему координат, в которой все недиагональные компоненты симметричного тензора исчезают. Эту систему координат называют *главной*. Тензор деформации, приведенный к главной системе, называют *главным тензором деформации*. Если привести (IX.1.2) к главной системе координат, то

$$dl' = \sqrt{1+2u^{(i)}}\, dl, \qquad \text{(IX.1.3)}$$

где

$$u^{(i)} = \begin{pmatrix} u^{(1)} & 0 & 0 \\ 0 & u^{(2)} & 0 \\ 0 & 0 & u^{(3)} \end{pmatrix}$$

— главный тензор деформации.

Относительное увеличение расстояния $(dl' - dl)/dl = \sqrt{1+2u^{(i)}} - 1$. Приближенные значения квадратного корня в (IX.1.3):

$$dl' = \sqrt{1+2u^{(i)}} \approx 1 + u^{(i)},$$

$$\frac{dl' - dl}{dl} \approx \frac{(1+u^{(i)})\, dl - dl}{dl} \approx u^{(i)},$$

или

$$\frac{dx'_i - dx_i}{dx_i} \approx u^{(i)}. \qquad \text{(IX.1.4)}$$

Формула (IX.1.4) показывает, что если в произвольной системе координат деформация складывается из деформаций сдвига и растяжения, то методом преобразования координатных осей можно эту деформацию представить в виде совокупности трех деформаций растяжения.

Деформация объема. Запишем изменение объема тела при деформации. Расчет проведем относительно главной системы координат. Изменение элемента объема $dV' - dV$, где dV' — элемент объема деформированного тела; dV — начальный элемент объема, причем

$$dV' = dx'_1\, dx'_2\, dx'_3 = (u^{(1)} + 1)(u^{(2)} + 1)(u^{(3)} + 1)\, dx_1\, dx_2\, dx_3,$$

или

$$dV' = (u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)} + 3u^{(1)}u^{(2)} + 3u^{(1)}u^{(3)} + 3u^{(2)}u^{(3)} + $$
$$+ 3u^{(1)} + 3u^{(2)} + 3u^{(3)})\, dx_1\, dx_2\, dx_3 + dx_1\, dx_2\, dx_3.$$

При малых деформациях произведениями $u^{(1)}u^{(2)}u^{(3)}$; $u^{(1)}u^{(2)}$; и т. д. можно пренебречь, так что $dV' = dV + (u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)})\, dV$. Поэтому

$$\frac{dV' - dV}{dV} = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}. \qquad \text{(IX.1.5)}$$

Относительное изменение объема при малых деформациях равно сумме диагональных членов главного тензора деформации. Из алгебры известно, что сумма диагональных членов симметричного тензора инвариантна относительно преобразования координат

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = u^{(1)} + u^{(2)} + u^{(3)}.$$

В формуле (IX.1.5) в левой части стоит инвариантная величина (относительное изменение объема не зависит от выбора системы координат).

Таким образом, если известен тензор малых деформаций в какой-либо системе координат, то сумма его диагональных членов равна относительной деформации объема.

Тензор напряжения. Если в свободном теле представить себе плоскость, отделяющую одну часть тела от другой, то через эту плоскость действуют силы сцепления частей тела. Эти силы взаимно компенсируют друг друга и определяются только внутренней природой тела. Однако если тело деформировано, то равновесие внутренних сил нарушается и сумма сил, действующих внутри тела, не равна нулю, а должна компенсироваться суммой тех сил, которые возникают вследствие воздействия со стороны внешних тел. Пусть в элементе объема тела действует сила с компонентой $F_i dV$. Полная объемная сила, когда воздействий нет, выражается интегралом $\int_V F_i\,dV = 0$. Если со стороны внешних тел к данному объему V тела приложены силы, то этот интеграл не будет равен нулю и должен преобразоваться к силам, действующим через поверхность, ограничивающую объем V:

$$\int_V F_i\,dV = \int_{(V)} \sigma_{ik} n_k\,df = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,dV.$$

Это значит, что сила, отнесенная к единице объема, может быть представлена в виде градиента тензора σ_{ik}:

$$F_i = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}. \qquad \text{(IX.1.6)}$$

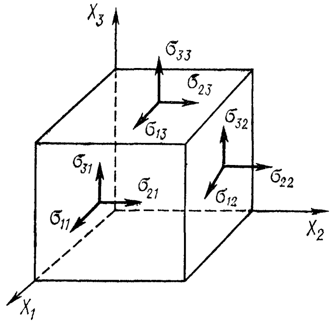

Рис. IX.1.1

Только в этом случае объемный интеграл может быть сведен к интегралу по поверхности:

$$\int_V F_i\,dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k}\,dV = \int_{(V)} \sigma_{ik} n_k\,df. \qquad \text{(IX.1.7)}$$

Тензор σ_{ik} называют *тензором напряжения*. Между объемной силой и тензором напряжения существует связь (IX.1.6). Компоненты тензора напряжения изображены на рис. IX.1.1.

Главное свойство тензора напряжений. Для выявления главного свойства тензора напряжений обратимся к задаче о вычислении момента сил, действующих на объем тела.

Как известно, момент силы определяется формулой

$$\mathbf{M} = [\mathbf{F}\mathbf{r}],$$

или в координатной форме

$$M_{ik} = F_i x_k - F_k x_i.$$

Иначе говоря, момент силы выражается тензором второго порядка. Пусть в написанных выше формулах F_i — компоненты силы, приходящейся на единицу объема. Тогда M_{ik} есть компонента тензора момента силы, приходящаяся на единицу объема, а $M_{ik}\,dV$ — компонента тензора в элементе объема dV. Компонента момента силы, действующей на весь объем, $\int_V M_{ik}\,dV = \int_V (F_i x_k - F_k x_i)\,dV$.

Учитывая выражение для F_i через компоненту тензора напряжения, получаем

$$\int_V M_{ik}\,dV = \int\left(\frac{\partial\sigma_{il}}{\partial x_l}x_k - \frac{\partial\sigma_{kl}}{\partial x_l}x_i\right)dV =$$

$$= \int_V \frac{\partial}{\partial x_l}(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)\,dV - \int_V\left(\sigma_{il}\frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{ki}\frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right)dV.$$

Первый интеграл с помощью теоремы Остроградского — Гаусса преобразуем в интеграл по поверхности. Второй интеграл, используя соотношение $\frac{\partial x_k}{\partial x_i} = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = k, \\ 0 \text{ при } i \neq k, \end{cases}$ представим в виде

$$\int_V\left(\sigma_{ik}\frac{\partial x_k}{\partial x_i} - \sigma_{ki}\frac{\partial x_i}{\partial x_k}\right)dV = \int_V(\sigma_{ik} - \sigma_{ki})\,\delta_{ik}\,dV.$$

Поскольку нескомпенсированные вращательные моменты могут действовать через поверхность тела, то интеграл, который не приводится к интегралу по поверхности, должен быть равен нулю:

$$\int_V(\sigma_{ik} - \sigma_{ki})\,\delta_{ik}\,dV = 0.$$

Отсюда следует

$$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}. \tag{IX.1.8}$$

Соотношение (IX.1.8) выражает главное свойство тензора напряжения: *тензор напряжений симметричен относительно диагональных членов.*

Условия равновесия. Если на поверхность тела не действуют внешние тела, а внутри действуют объемные силы, то условие равновесия

$$F_i = \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = -\rho g_i. \tag{IX.1.9}$$

Если на тело действуют внешние силы $p_i\,df$, то они должны быть уравновешены силами внутреннего напряжения так, чтобы

$$(p_i - \sigma_{ik}n_k)\,df = 0,$$

или

$$p_i = \sigma_{ik}n_k. \tag{IX.1.10}$$

Наконец, условие динамического равновесия получается на основании принципа Даламбера, если объемную силу F_i в (IX.1.9) заменить эффективной объемной силой:

$$\rho g_i - \rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}.$$

Тогда из уравнения (IX.1.9) следует уравнение движения при деформировании:

$$\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k} = \rho\left(g_i - \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}\right). \tag{IX.1.11}$$

Деформация и механическая работа. При деформировании тела внешние силы производят работу. Работа деформирования du_i, совершаемая под действием внутренних сил $F_i\,dV$, записывается как произведение силы на деформацию: $F_i\,du_k\,dV$.

Работа, произведенная во всем объеме тела, представляет собой сумму всех элементарных работ деформирования:

$$\int\limits_V F_i\,du_i\,dV = \int \frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial x_k}\,du_i\,dV =$$
$$= \int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}\,du_i)\,dV - \int\limits_V \sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial x_i}(du_i)\,dV.$$

В полученном выражении работы первый интеграл приводится к интегралу по поверхности

$$\int\limits_V \frac{\partial}{\partial x_k}(\sigma_{ik}\,du_i)\,dV = \int\limits_V \sigma_{ik}\,du_i\,n_k\,df,$$

а второй преобразуется к виду

$$\int\limits_V \sigma_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}(du_i)\,dV = \int\limits_V \sigma_{ik}d\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\,dV =$$
$$= \int\limits_V \sigma_{ik}d\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)\right]dV = \int\limits_V \sigma_{ik}\,du_{ik}\,dV.$$

Таким образом, работа сил упругости во всем объеме тела равна

$$A = \int\limits_{(V)} \sigma_{ik}\,du_i n_k\,df - \int\limits_V \sigma_{ik}\,du_{ik}\,dV.$$

Полученное выражение должно быть справедливо для любых объемов.

Необходимо считать, что при увеличении объема до бесконечности работа должна оставаться конечной величиной. Вследствие затухания любого действия в бесконечно удаленной точке полагаем, что первый интеграл равен нулю. Таким образом, работа деформированного тела

$$\int\limits_V \delta A\,dV = -\int \sigma_{ik}\delta u_{ik}\,dV.$$

Отсюда работа, отнесенная к единице объема,

$$\delta A = -\sigma_{ik}\,du_{ik}. \qquad (\text{IX}.1.12)$$

Термодинамические потенциалы деформированного тела. Будем иметь в виду, что в качестве обобщенных сил принимаем компоненты тензора напряжения $x_{ik} = \sigma_{ik}$, а в качестве обобщенных термодинамических координат — компоненты тензора деформации. Поэтому функции, записанные на основе (IX.1.9) с учетом (IX.1.12), являются термодинамическими функциями единицы объема. В табл. IX.1.1 приведены формулы термодинамических потенциалов и уравнений состояния для изотропного твердого тела.

Таблица IX.11.

Термодинамический потенциал	Приращение	Уравнение состояния
Внутренняя энергия единицы объема	$du=T\,ds-\sigma_{ik}\delta u_{ik}$	$T=\left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_{u_{ik}}$ $\sigma_{ik}=-\left(\frac{\partial u}{\partial u_{ik}}\right)_s$
Тепловая функция единицы объема	$dh=T\,ds+u_{ik}\,d\sigma_{ik}$	$T=\left(\frac{\partial h}{\partial s}\right)_{\sigma_{ik}}$ $u_{ik}=\left(\frac{\partial h}{\partial \sigma_{ik}}\right)_s$
Свободная энергия единицы объема	$df=-s\,dT-\sigma_{ix}\,du_{ik}$	$-s=\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_{\sigma_{ik}}$ $\sigma_{ik}=\left(\frac{\partial f}{\partial u_{ik}}\right)_T$
Термодинамический потенциал Гиббса	$dg=-sdT+u_{ik}\,d\sigma_{ik}$	$-s=\left(\frac{\partial g}{\partial T}\right)_{\sigma_{ik}}$ $u_{ik}=\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ik}}\right)_T$

Зная термодинамический потенциал, можно получить уравнение состояния. Обычно явных выражений для термодинамических потенциалов не существует, поэтому составить уравнение состояния, пользуясь табл. IX.1.1, на первый взгляд невозможно. Однако в линейной теории упругости дело значительно упрощается, поскольку все изменения параметров принимаются малыми. На основании этого можно получить приближенные выражения термодинамических потенциалов при разложении той или иной функции по малым параметрам. Тогда для твердого тела можно найти восемь линейных уравнений состояния: 4 механических и 4 калорических.

Закон Гука. Механические уравнения состояния твердого тела в линейном приближении известны как различные формы закона Гука. Простейшая форма закона Гука, широко применяемая в технических приложениях, относится к однородной деформации стержней. Для выявления многообразных видов упругих волн необходимо иметь ясное представление о линейных уравнениях состояния в общем виде.

Рассмотрим изотермическую деформацию упругого тела. При ней изменение свободной энергии единицы объема выражается функцией компонент тензора деформации и ее можно представить в виде степенного ряда по малым приращениям этих компонент:

$$F=f_0+\frac{\partial f}{\partial u_{ik}}\delta u_{ik}+\frac{1}{2!}\frac{\partial^2 f}{\partial u_{ik}^2}\delta u_{ik}^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial u_{ik}^3}\delta u_{ik}^3+\ldots \quad \text{(IX.1.13)}$$

Здесь f_0 — удельная свободная энергия при нулевых деформациях; $\partial^n f/\partial u_{ik}^n$ — производные, взятые при значениях независимых переменных, равных нулю.

Из сравнения коэффициентов разложения с механическим уравнением состояния, составленным на основе свободной энергии, видно, что первый коэффициент $\partial f/\partial u_{ik}$ является компонентой тензора напряжения. Однако он взят при нулевой деформации. Поэтому второе слагаемое рассматриваемого ряда равно нулю. Следующие слагаемые преобразуются так, как показано ниже:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u_{ik}^2}\Big|_{u_{ik}=0}=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}};\ \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 f}{\partial u_{ik}^3}=\frac{1}{3!}\frac{\partial^2\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}^2}\Big|_{u_{ik}=0}.$$

Опустив первый член в (VIII.5.13), как несущественную постоянную, находим

$$\delta f=\frac{1}{2}\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}}\Big|_{u_{ik}=0}\delta u_{ik}^2+\frac{1}{3!}\frac{\partial^2\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}^2}\Big|_{u_{ik}=0}\delta u_{ik}^3+\ldots. \qquad \text{(IX.1.14)}$$

Согласно (IX.1.14), механическое уравнение состояния получаем в виде

$$\sigma_{ik}=-\frac{\partial f}{\partial u_{ik}}=\left(\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}}\right)_0\delta u_{ik}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}^2}\right)_0\delta u_{ik}^2+\ldots.$$

Ограничившись линейными членами, запишем наиболее простое механическое уравнение состояния, называемое *законом Гука*:

$$\sigma_{ik}=-\frac{\partial\sigma_{ik}}{\partial u_{ik}}\Big|_{u_{ik}=0}\delta u_{ik}.$$

Приращение тензора деформации можно выразить через приращение диагональных членов, поэтому в правой части этой формулы выделим отдельно сумму диагональных членов тензора деформации. В результате закон Гука принимает вид

$$\sigma_{ik}=\lambda u_{ll}\delta_{ik}+2\mu u_{ik}, \qquad \text{(IX.1.15)}$$

где λ и μ — модули упругости (λ и μ — первый и второй коэффициента Ламе); $\delta_{ik}=1$ при $i=k$ и $\delta_{ik}=0$ при $i\neq k$.

Уравнению (IX.1.15) можно придать форму, в которой четко разделены сдвиговая и объемная деформации. Одной из возможных форм такого рода является выражение

$$\sigma_{ik}=2G\left(u_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}\right)+K\delta_{ik}u_{ll}, \qquad \text{(IX.1.16)}$$

где G и K — модули упругости.

Постоянную G называют *модулем сдвига*, поскольку для деформаций без изменения объема могут существовать только сдвиговые напряжения: $\sigma_{ik}=2Gu_{ik}$ ($u_{ik}=0$ при $i=k$).

Если деформация тела не сопровождается сдвигом, то для изотропного тела ($u_{11}=u_{22}=u_{33}$) получаем

$$\sigma_{ik}=2G\left(u_{11}-\frac{3}{3}u_{11}\right)+k3u_{11}=3ku_{11},$$

т. е. имеем чистое расширение или сжатие: $u_{11}=\sigma_{11}/(3k)=p/3k$.

При этом относительное изменение объема

$$3u_{ii}=\frac{\Delta V}{V}=\frac{p}{k}.$$

Коэффициент K называют *изотермическим модулем объемной упругости.*

Между постоянными Ламе и модулями G и K существует связь:

$$G=\mu;\quad K=\lambda+\frac{2}{3}\mu. \qquad \text{(IX.1.17)}$$

В выражениях (IX.1.15) и (IX.1.16) компоненты тензора напряжения являются линейными функциями компонент тензора деформации. Иногда удобно пользоваться обратной зависимостью, т. е. линейными функциями компонент тензора деформации от компонент тензора напряжений. Чтобы получить эти зависимости, в каждом из уравнений (IX.1.15) и (IX.1.16) найдем тензор σ_{ll}. Например, положив в (IX.1.15) $i=k=l$, получим

$$\sigma_{ll}=3\lambda u_{ll}+2\mu u_{ll}=(3\lambda+2\mu)\,u_{ll}.$$

Следовательно,

$$u_{ll}=\frac{\sigma_{ll}}{3\lambda+2\mu}.$$

Подставляя выражение для u_{ll} в формулу (IX.1.15) и решая уравнение относительно u_{ik}, получаем

$$u_{ik}=\frac{1}{2\mu}\left(\sigma_{ik}-\frac{\lambda}{2\mu+3\lambda}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}\right), \qquad \text{(IX.1.18)}$$

Точно так же можно вывести аналогичную формулу:

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2G}\left(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\,\delta_{ik}\sigma_{ll}\right). \qquad \text{(IX.1.19)}$$

Модуль Юнга и коэффициент Пуассона. Одним из видов деформации является простое растяжение стержня. На основе описания деформации растяжения введены технические модули: модуль Юнга E и коэффициент Пуассона σ. Допустим, что стержень прочно закреплен одним основанием и подвергнут растягивающему усилию P. Если сечение стержня f, то средняя внешняя сила, приходящаяся на единицу площади, численно равна $p=\frac{P}{f}$. При не слишком больших усилиях возникает небольшое удлинение стержня и уменьшение его поперечного сечения. Продольная деформация стержня равна $\Delta l/l$, поперечная — $\Delta d/d$ (здесь l — начальная длина стержня; d — начальный линейный размер поперечного сечения; Δl и Δd — изменения этих величин при деформации). Оставаясь в рамках линейного приближения, можно записать два уравнения:

$$\frac{\Delta l}{l}=\frac{1}{E}\,p,\quad \frac{\Delta d}{d}=-\sigma\frac{\Delta l}{l}. \qquad \text{(IX.1.20)}$$

Оба выражения представляют собой закон Гука для однородной деформации растяжения.

Формулы (IX.1.20) удобны для нахождения из опыта модулей упругости материалов. Чтобы использовать в общем законе Гука модули E и σ, необходимо найти выражения модулей μ, λ; K и G через технические модули упругости E и σ. Для этого запишем отдельно все компоненты тензора деформации (IX.1.18) при простом растяжении.

С этой целью расположим прямоугольную систему координат так, чтобы ось Z совпадала с осью стержня. Допустим, что сила растяжения направлена в сторону положительных значений z. На основе граничных условий среднее значение силы растяжения, отнесенной к площади f, равно zz-й компоненте тензора напряжения:

$$\frac{P}{f} = p = \sigma_{zz}.$$

Боковые грани стержня свободны, поэтому $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$; внешние моменты сил также равны нулю, поэтому сдвиговые напряжения $\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0$.

Подставляя компоненты напряжения в (IX.1.18), получаем компоненты тензора деформаций простого растяжения в виде

$$u_{xx} = \frac{1}{2\mu}\left[\sigma_{xx} - \frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right] = -\frac{1}{2\mu}\,\frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\,p, \quad \text{(IX.1.21)}$$

$$u_{yy} = \frac{1}{2\mu}\,\frac{\lambda}{2\mu + 3\lambda}\,p, \quad u_{22} = \frac{1}{\mu}\,\frac{\lambda + \mu}{2\mu + 3\lambda}\,p.$$

С учетом (IX.1.20) и (IX.1.21) находим, что отношение продольного напряжения p к продольной деформации, называемое модулем Юнга, выражается формулой

$$E = \frac{\mu(2\mu + 3\lambda)}{\mu + \lambda}, \quad \text{(IX.1.22)}$$

а отношение поперечной деформации $u_{xx} = u_{yy}$ к деформации удлинения (коэффициент Пуассона)

$$\sigma = \frac{\lambda}{2(\mu + \lambda)}. \quad \text{(IX.1.23)}$$

Точно так же можно показать, что справедливы следующие формулы:

$$E = \frac{9KG}{3K + G}, \quad \sigma = \frac{1}{2}\,\frac{3K - 2G}{3K + 2G}, \quad \text{(IX.1.24)}$$

где G — модуль сдвига.

Поскольку K и G всегда положительны, то коэффициент Пуассона может изменяться от $0\,(K = 0)$ до $^1/_2\,(G = 0)$. Полезно иметь в виду, кроме того, следующие соотношения:

$$\mu = G = \frac{E}{2(1 + \sigma)},$$

$$K = \frac{E}{3(1 - 2\sigma)}, \quad \lambda = \frac{E\sigma}{(1 - 2\sigma)(1 + \sigma)}, \quad \text{(IX.1.25)}$$

где K — модуль упругости объема, σ — коэффициент Пуассона, E — модуль Юнга.

Физический смысл первого коэффициента Ламе λ. Деформация одностороннего сжатия проявляется в случае, когда размеры стержня изменяются только в одном направлении. Допустим, что стержень зажат снизу и с боков неподвижными стенками. На свободную грань стержня действует сила, которая вызывает деформацию вдоль оси стержня, равную $\Delta l/l = u_{zz}$. Найдем напряжения, возникающие в стержне. В данном случае удобно воспользоваться формулами закона Гука, в которых независимыми переменными являются компоненты тензора деформации (IX.1.15) или (IX.1.16). В эти формулы подставим компоненты тензора деформации: $u_{xx} = u_{yy} = 0$, $u_{zz} = \Delta l/l$. В результате получаем выражения компонент напряжения при односторонней деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\delta_{xx}u_{zz} + 2\mu u_{xx} = \lambda u_{zz}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda\delta_{yy}u_{zz} + 2\mu u_{yy} = \lambda u_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\delta_{zz}u_{zz} + 2\mu u_{zz} = (\lambda + 2\mu)\, u_{zz}, \end{aligned} \tag{IX.1.26}$$

или

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\lambda\frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma_{zz} = -(\lambda + 2\mu)\frac{\Delta l}{l}.$$

Знак минус в последних формулах показывает, что напряжения при сжатии направлены внутрь образца. Наоборот, если бы односторонняя деформация была положительной, то напряжения, возникающие при этой деформации, были бы направлены в сторону внешних тел. В данном случае рассматриваем деформации как причину возникающих напряжений.

Формулы (IX.1.26) раскрывают физический смысл первого коэффициента Ламе λ. Очевидно,

$$\lambda = \frac{\sigma_{xx}}{u_{zz}}. \tag{IX.1.27}$$

Иначе говоря, модуль λ равен отношению поперечного нормального напряжения к удлинению стержня при одностороннем растяжении.

§ IX.2. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Деформации, рассмотренные в § IX.1, соответствуют изменениям состояния тела при постоянной температуре. Поэтому модули упругости, встречающиеся в тех или иных формулах закона Гука, характеризуют связь между деформациями и напряжениями при изотермических процессах. Эти модули называют *изотермическими*. Однако изотермическое изменение состояния твердого тела является идеализацией. В природе деформации большей частью осуществляются при условиях, когда температура тела по тем или иным причинам не остается постоянной. В таком случае также можно записать закон Гука, но модули упругости в этом законе будут отличаться от изотермических. Особенно интересен случай динамических деформаций, когда процесс деформации осуществляется в условиях теплоизоляции. Итак, чтобы получить адиабатический закон Гука, воспользуемся механическим уравнением состояния на основе внутренней энергии: $\sigma_{ik} = -(\partial u/\partial u_{ik})_s$.

Формально внутреннюю энергию при малых деформациях можно представить в виде ряда (X.1.13), но для внутренней энергии $u(s, u_{ik})$ — в виде ряда, коэффициенты которого будут производными компонент напряжения по переменным u_{ik} при постоянной энтропии. Тогда