равную $\Delta l/l = u_{zz}$. Найдем напряжения, возникающие в стержне. В данном случае удобно воспользоваться формулами закона Гука, в которых независимыми переменными являются компоненты тензора деформации (IX.1.15) или (IX.1.16). В эти формулы подставим компоненты тензора деформации: $u_{xx} = u_{yy} = 0$, $u_{zz} = \Delta l/l$. В результате получаем выражения компонент напряжения при односторонней деформации:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= \lambda\delta_{xx}u_{zz} + 2\mu u_{xx} = \lambda u_{zz}, \\ \sigma_{yy} &= \lambda\delta_{yy}u_{zz} + 2\mu u_{yy} = \lambda u_{zz}, \\ \sigma_{zz} &= \lambda\delta_{zz}u_{zz} + 2\mu u_{zz} = (\lambda + 2\mu)\, u_{zz}, \end{aligned} \tag{IX.1.26}$$

или

$$\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = -\lambda\frac{\Delta l}{l}, \quad \sigma_{zz} = -(\lambda + 2\mu)\frac{\Delta l}{l}.$$

Знак минус в последних формулах показывает, что напряжения при сжатии направлены внутрь образца. Наоборот, если бы односторонняя деформация была положительной, то напряжения, возникающие при этой деформации, были бы направлены в сторону внешних тел. В данном случае рассматриваем деформации как причину возникающих напряжений.

Формулы (IX.1.26) раскрывают физический смысл первого коэффициента Ламе λ. Очевидно,

$$\lambda = \frac{\sigma_{xx}}{u_{zz}}. \tag{IX.1.27}$$

Иначе говоря, модуль λ равен отношению поперечного нормального напряжения к удлинению стержня при одностороннем растяжении.

§ IX.2. АДИАБАТИЧЕСКИЕ ДЕФОРМАЦИИ

Деформации, рассмотренные в § IX.1, соответствуют изменениям состояния тела при постоянной температуре. Поэтому модули упругости, встречающиеся в тех или иных формулах закона Гука, характеризуют связь между деформациями и напряжениями при изотермических процессах. Эти модули называют *изотермическими*. Однако изотермическое изменение состояния твердого тела является идеализацией. В природе деформации большей частью осуществляются при условиях, когда температура тела по тем или иным причинам не остается постоянной. В таком случае также можно записать закон Гука, но модули упругости в этом законе будут отличаться от изотермических. Особенно интересен случай динамических деформаций, когда процесс деформации осуществляется в условиях теплоизоляции. Итак, чтобы получить адиабатический закон Гука, воспользуемся механическим уравнением состояния на основе внутренней энергии: $\sigma_{ik} = -(\partial u/\partial u_{ik})_s$.

Формально внутреннюю энергию при малых деформациях можно представить в виде ряда (X.1.13), но для внутренней энергии $u(s, u_{ik})$ — в виде ряда, коэффициенты которого будут производными компонент напряжения по переменным u_{ik} при постоянной энтропии. Тогда получим формулы закона Гука, содержащие адиабатические модули. Все адиабатические модули отличаются от изотермических. Связь между ними можно проследить с помощью термодинамического соотношения

$$\frac{1}{K_s} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^{(V)^2}}{c_p}. \qquad \text{(IX.2.1)}$$

Поскольку при сдвиговых деформациях не происходит изменения объема, адиабатический модуль сдвига равен изотермическому:

$$G_s = G. \qquad \text{(IX.2.2)}$$

Выражения (IX.2.1) и (IX.2.2), дополненные формулами связи между различными модулями, позволяют найти соотношения:

$$E_s = \frac{E}{1 - ET\alpha^{(V)^2}/c_p}, \quad \sigma_s = \frac{\sigma + ET\alpha^{(V)^2}/c_p}{1 - ET\alpha^{(V)^2}/c_p}. \qquad \text{(IX.2.3)}$$

Для оценки порядков величин обратимся к числовым значениям для модулей железа: $E \approx 21 \cdot 10^{19}$ дин/см^2; $\sigma = 0{,}287$. При температуре $T = 400$ K удельная теплоемкость железа $c_p \approx 2{,}1 \cdot 10^7$ эрг/(г · град).

Однако в формулы (IX.2.3) входит теплоемкость единицы объема вещества $c_p = \rho c_p = 1{,}6 \cdot 10^8$ эрг/(см^3 · град). Коэффициент объемного расширения железа

$$\alpha^{(v)} = 3 \cdot 10^{-5} \ 1/\text{град}$$

Величина $E\alpha^{(v)^2}/c_p$, входящая в формулы (IX.2.3) для $T = 400$ K, имеет числовое значение $\approx 1{,}6 \cdot 10^{-2}$. Поэтому можно пользоваться приближенными формулами:

$$E_s \approx E\left(1 + E\frac{T\alpha^{(V)^2}}{c_p}\right), \qquad \sigma_s \approx \sigma + (1+\sigma)E\frac{T\alpha^{(V)^2}}{c_p}. \qquad \text{(IX.2.4)}$$

В частности, для железа

$$E_s \approx E\,(1 + 1{,}6 \cdot 10^{-2}); \qquad \sigma_s \approx \sigma + (1+\sigma) \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-2}.$$

Для других металлов адиабатические модули также мало отличаются от изотермических.

Уравнения динамического равновесия. Преобразуем уравнение динамики деформации

$$\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho g_i, \qquad \text{(IX.2.5)}$$

используя закон Гука:

$$\sigma_{ik} = \lambda\delta_{ik} + 2\mu u_{ik}.$$

Непосредственное дифференцирование по x_k правой части (IX.2.5) составит:

$$\frac{\partial \sigma_{ix}}{\partial x_k} = \lambda\delta_{ik}\frac{\partial u_{ll}}{\partial x_k} + 2\mu\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k},$$

где

$$u_{ll} = \frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right), \quad \frac{\partial u_{ll}}{\partial x_k} = \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k\,\partial x_l},$$

$$\frac{\partial u_{ik}}{\partial x_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x_k\,\partial x_i}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 u_l}{\partial x_k \partial x_i}\right).$$

После несложных преобразований получим

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = \mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}. \qquad \text{(IX.2.6)}$$

Теперь можно записать уравнения динамики деформированного тела в линейном приближении. Для этого в уравнение (IX.2.5) подставим $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ из (IX.2.6). В результате получим

$$\mu\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2}+(\lambda+\mu)\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial u_k}{\partial x_k}+\rho g_i=\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \tag{IX.2.7}$$

К уравнениям (IX.2.7) необходимо добавить уравнения, составляющие граничные и начальные условия. Если обозначить через p_i компоненту внешней силы, действующей на единицу поверхности тела, а через n_k компоненту единичной внешней нормали, то в качестве граничного условия следует взять $\sigma_{ik}n_k=p_i$.

Например, на свободной поверхности $\sigma_{ik}=0$ и поэтому граничное условие имеет вид $p_i=0$.

Если тело зажато, то в качестве граничного условия используют $u_i=0$.

Наконец, в общем случае в качестве граничного условия задают $p_i/u_k=q_{ik}$, т. е. отношение напряжения к деформации.

§ IX.3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНОЙ СРЕДЕ

Плоские волны. Как известно из § IX.1, уравнение движения (IX.2.7) в упругой среде соответствует малым деформациям. Поэтому для периодических процессов это уравнение пригодно лишь для малых амплитуд. Применим его для выяснения закономерности распространения плоских волн.

Представим себе плоскую волну, которая распространяется вдоль направления координаты $x=x_1$. Смещение $\mathbf{u}$ не зависит от $y=x_2$ и $z=x_3$, следовательно, зависит только от x_1, т. е. компоненты смещения u_1, u_2 и u_3 являются функциями только координаты x_1 и времени t. Для этого случая уравнение (IX.2.7), записанное для компонент смещения u_1, u_2 и u_3, имеет вид

$$\rho\ddot{u}_1=(\lambda+2\mu)\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2},\quad \rho\ddot{u}_2=\mu\frac{\partial^2 u_2^2}{\partial x_1^2},\quad \rho\ddot{u}_3=\mu\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2},$$

или, введя обозначения $\mu/\rho=c_\tau^2$, $\lambda+2\mu/\rho=c_l^2$, получим волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}=\frac{1}{c_l^2}\ddot{u}_1,\quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2}=\frac{1}{c_\tau^2}\ddot{u}_2,\quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1^2}=\frac{1}{c_2}\ddot{u}_3. \tag{IX.3.1}$$

Первое из трех уравнений (IX.3.1) является уравнением смещения вдоль распространения волны; оно характеризует продольную волну; вторые два содержат смещения u_2 и u_3, которые перпендикулярны направлению распространения волны и соответствуют поперечным волнам. Постоянные c_l и c_τ имеют размерность скорости и представляют собой фазовые скорости распространения продольной и поперечной (сдвиговой) волн:

$$c_l=\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{E}{\rho}\frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}}=\sqrt{\frac{3K+4G}{3\rho}}; \tag{IX.3.2}$$

$$c_\tau=\sqrt{\frac{\mu}{\rho}}=\sqrt{\frac{E}{2\rho}\frac{1}{1+\sigma}}=\sqrt{\frac{G}{\rho}}. \tag{IX.3.3}$$