Теперь можно записать уравнения динамики деформированного тела в линейном приближении. Для этого в уравнение (IX.2.5) подставим $\partial\sigma_{ik}/\partial x_k$ из (IX.2.6). В результате получим

$$\mu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k^2} + (\lambda + \mu) \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} + \rho g_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}. \qquad \text{(IX.2.7)}$$

К уравнениям (IX.2.7) необходимо добавить уравнения, составляющие граничные и начальные условия. Если обозначить через p_i компоненту внешней силы, действующей на единицу поверхности тела, а через n_k компоненту единичной внешней нормали, то в качестве граничного условия следует взять $\sigma_{ik} n_k = p_i$.

Например, на свободной поверхности $\sigma_{ik} = 0$ и поэтому граничное условие имеет вид $p_i = 0$.

Если тело зажато, то в качестве граничного условия используют $u_i = 0$.

Наконец, в общем случае в качестве граничного условия задают $p_i/u_k = q_{ik}$, т. е. отношение напряжения к деформации.

§ IX.3. УПРУГИЕ ВОЛНЫ В ТРЕХМЕРНОЙ СРЕДЕ

Плоские волны. Как известно из § IX.1, уравнение движения (IX.2.7) в упругой среде соответствует малым деформациям. Поэтому для периодических процессов это уравнение пригодно лишь для малых амплитуд. Применим его для выяснения закономерности распространения плоских волн.

Представим себе плоскую волну, которая распространяется вдоль направления координаты $x = x_1$. Смещение $\mathbf{u}$ не зависит от $y = x_2$ и $z = x_3$, следовательно, зависит только от x_1, т. е. компоненты смещения u_1, u_2 и u_3 являются функциями только координаты x_1 и времени t. Для этого случая уравнение (IX.2.7), записанное для компонент смещения u_1, u_2 и u_3, имеет вид

$$\rho \ddot{u}_1 = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \quad \rho \ddot{u}_2 = \mu \frac{\partial^2 u_2^2}{\partial x_1^2}, \quad \rho \ddot{u}_3 = \mu \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2},$$

или, введя обозначения $\mu/\rho = c_\tau^2$, $\lambda + 2\mu/\rho = c_l^2$, получим волновые уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_l^2} \ddot{u}_1, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_\tau^2} \ddot{u}_2, \quad \frac{\partial u_3}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_2} \ddot{u}_3. \qquad \text{(IX.3.1)}$$

Первое из трех уравнений (IX.3.1) является уравнением смещения вдоль распространения волны; оно характеризует продольную волну; вторые два содержат смещения u_2 и u_3, которые перпендикулярны направлению распространения волны и соответствуют поперечным волнам. Постоянные c_l и c_τ имеют размерность скорости и представляют собой фазовые скорости распространения продольной и поперечной (сдвиговой) волн:

$$c_l = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{(1-\sigma)}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}} = \sqrt{\frac{3K + 4G}{3\rho}}; \qquad \text{(IX.3.2)}$$

$$c_\tau = \sqrt{\frac{\mu}{\rho}} = \sqrt{\frac{E}{2\rho} \frac{1}{1+\sigma}} = \sqrt{\frac{G}{\rho}}. \qquad \text{(IX.3.3)}$$

Между фазовыми скоростями продольной и сдвиговой волн существует связь:

$$\frac{c_l}{c_\tau}=\sqrt{2\,\frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}. \tag{IX.3.4}$$

Это отношение для различных металлов изменяется в больших пределах. Например, для цинка ($\sigma\approx 0{,}25$) и свинца ($\sigma=0{,}44$) отношения скоростей, вычисленные по (IX.3.4), определяются числами 1,74 и 3,3.

Волновые уравнения (IX.3.1) имеют решения в виде функций:

$$u_1=f_x(c_lt-x_1)+f'_x(c_lt+x_1),$$
$$u_2=f_y(c_\tau t-x_1)+f'_y(c_\tau t+x_1),$$
$$u_3=f_z(c_\tau t-x_1)+f'_z(c_\tau t+x_1).$$

Каждая из этих функций описывает распространение плоских волн в противоположных направлениях. Первая функция дает представление о распространении продольной волны, вторые два описывают распространение поперечных волн. Следовательно, произвольная плоская волна в изотропной упругой среде состоит из продольной и поперечных волн, причем фазовая скорость продольной больше фазовой скорости поперечной волны.

Для продольной волны дивергенция смещения, т. е. относительное изменение объема, не равна нулю: $\operatorname{div} u_l\neq 0$. В поперечной волне изменений объема не происходит: $\operatorname{div} u_\tau=0$. В связи с этим продольные волны иногда называют *объемными*; поперечные — *сдвиговыми*.

Частным случаем плоской волны является синусоидальная плоская волна, распространяющаяся вдоль оси X:

$$u_1=A_l\cos(\omega t-k_lx_1),\quad u_2=A_\tau\cos(\omega t-k_\tau x_1),\quad u_3=A_\tau\cos(\omega t-k_\tau x_1),$$

где $k_l=\omega/c_l$; $k_\tau=\omega/c_\tau$.

Рассмотрим распространение упругой волны произвольной формы. Известно, что любую малую деформацию можно представить как сумму деформации растяжения и сдвига:

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_l+\mathbf{u}_\tau, \tag{IX.3.5}$$

где $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_\tau$ имеют следующие свойства:

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}_l=[\nabla\mathbf{u}_l]=0,\quad \operatorname{div} u_\tau=(\nabla\mathbf{u}_\tau)=0. \tag{IX.3.6}$$

Поэтому разделение волны произвольной формы на объемную и сдвиговую не зависит от формы волнового фронта: оно существует не только для плоских волн, но и для сферических, цилиндрических и других волн.

Покажем, что уравнение динамики для волн произвольной формы распадается на два волновых уравнения: одно для продольных, другое для поперечных волн. Для этого в уравнении движения выразим постоянные μ и λ через скорости c_l и c_τ: $\mu=\rho c_\tau^2$, $\lambda=\rho(c_l^2-2c_\tau^2)$. Тогда

$$\ddot{u}=c_\tau^2\Delta\mathbf{u}+(c_l^2-c_\tau^2)\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}. \tag{IX.3.7}$$

При подстановке в (IX.3.7) суммы (IX.3.5) с учетом (IX.3.6) получаем

$$\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2\,\Delta\mathbf{u}_l - (c_l^2 - c_\tau^2)\,\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_l = c_\tau^2\,\Delta\mathbf{u}_\tau - \ddot{\mathbf{u}}_\tau. \qquad \text{(IX.3.8)}$$

Из известной формулы векторного анализа

$$\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_l = \mathrm{rot}\,(\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_l) + \Delta\mathbf{u}_l = \Delta\mathbf{u}_l$$

с учетом (IX.3.6) находим

$$\mathrm{grad\,div}\,\mathbf{u}_l = \Delta\mathbf{u}_l.$$

В результате уравнение (IX.1.8) преобразуется к следующему виду:

$$\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2\,\Delta\mathbf{u}_l = -(\ddot{\mathbf{u}}_\tau - c_\tau^2\,\Delta\mathbf{u}_\tau). \qquad \text{(IX.3.9)}$$

Выше было отмечено, что смещение $\mathbf{u}_\tau$ подчиняется свойству $(\nabla\mathbf{u}_\tau) = 0$. Следовательно, вектор $\mathbf{u}_\tau$ можно представить как ротор некоторого вектора $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{u}_\tau = \mathrm{rot}\,\mathbf{A} = [\nabla\mathbf{A}].$$

С другой стороны, поскольку $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}_l = 0$, вектор $\mathbf{u}_l$ может быть выражен как градиент φ:

$$\mathbf{u}_l = \mathrm{grad}\,\varphi = \nabla\varphi.$$

Отсюда следует, что векторы $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_\tau$ взаимно перпендикулярны, на основании чего уравнение (IX.3.9) может быть удовлетворено при условии, что левая и правая части равны нулю. Тогда для волны с произвольным волновым фронтом получаем:

$$\Delta\mathbf{u}_l = \frac{1}{c_l^2}\,\ddot{\mathbf{u}}_l, \quad \Delta\mathbf{u}_\tau = \frac{1}{c_\tau^2}\,\ddot{\mathbf{u}}_\tau, \qquad \text{(IX.3.10)}$$

где $\mathbf{u}_\tau$ — соленоидальный вектор ($\mathrm{div}\,v_\tau = 0$); u_l — потенциальный вектор ($\mathrm{rot}\,u_l = 0$); c_l^2 и c_τ^2 — квадраты фазовых скоростей объемных и сдвиговых волн.

§ IX.4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО

В § VII.1 ч. I приведено решение задачи об отражении и преломлении плоской волны на плоской границе между различными жидкостями. Рассмотрим задачу об отражении и преломлении плоской волны на плоской границе между жидкостью и изотропным твердым телом.

Известно, что в жидкости могут распространяться только продольные волны. В твердом изотропном теле существуют лишь продольные и поперечные волны. Поэтому явления отражения и преломления на границе раздела жидкость — твердое тело сложнее ранее разобранного случая.

Если плоская волна падает на границу жидкость — твердое тело, то в результате взаимодействия падающей волны с неоднородностью,