

При подстановке в (IX.3.7) суммы (IX.3.5) с учетом (IX.3.6) получаем

$$\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l - (c_l^2 - c_\tau^2) \text{grad div } \mathbf{u}_l = c_\tau^2 \Delta \mathbf{u}_\tau - \ddot{\mathbf{u}}_\tau. \quad (\text{IX.3.8})$$

Из известной формулы векторного анализа

$$\text{grad div } \mathbf{u}_l = \text{rot} (\text{rot } \mathbf{u}_l) + \Delta \mathbf{u}_l = \Delta \mathbf{u}_l$$

с учетом (IX.3.6) находим

$$\text{grad div } \mathbf{u}_l = \Delta \mathbf{u}_l.$$

В результате уравнение (IX.1.8) преобразуется к следующему виду:

$$\ddot{\mathbf{u}}_l - c_l^2 \Delta \mathbf{u}_l = -(\ddot{\mathbf{u}}_\tau - c_\tau^2 \Delta \mathbf{u}_\tau). \quad (\text{IX.3.9})$$

Выше было отмечено, что смещение \mathbf{u}_τ подчиняется свойству $(\nabla \mathbf{u}_\tau) = 0$. Следовательно, вектор \mathbf{u}_τ можно представить как ротор некоторого вектора \mathbf{A} :

$$\mathbf{u}_\tau = \text{rot } \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}].$$

С другой стороны, поскольку $\text{rot } \mathbf{u}_l = 0$, вектор \mathbf{u}_l может быть выражен как градиент φ :

$$\mathbf{u}_l = \text{grad } \varphi = \nabla \varphi.$$

Отсюда следует, что векторы \mathbf{u}_l и \mathbf{u}_τ взаимно перпендикулярны, на основании чего уравнение (IX.3.9) может быть удовлетворено при условии, что левая и правая части равны нулю. Тогда для волны с произвольным волновым фронтом получаем:

$$\Delta \mathbf{u}_l = \frac{1}{c_l^2} \ddot{\mathbf{u}}_l, \quad \Delta \mathbf{u}_\tau = \frac{1}{c_\tau^2} \ddot{\mathbf{u}}_\tau, \quad (\text{IX.3.10})$$

где \mathbf{u}_τ — соленоидальный вектор ($\text{div } \mathbf{u}_\tau = 0$); u_l — потенциальный вектор ($\text{rot } u_l = 0$); c_l^2 и c_τ^2 — квадраты фазовых скоростей объемных и сдвиговых волн.

§ IX.4. ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ НА ГРАНИЦЕ ЖИДКОСТЬ — ТВЕРДОЕ ТЕЛО

В § VII.1 ч. I приведено решение задачи об отражении и преломлении плоской волны на плоской границе между различными жидкостями. Рассмотрим задачу об отражении и преломлении плоской волны на плоской границе между жидкостью и изотропным твердым телом.

Известно, что в жидкости могут распространяться только продольные волны. В твердом изотропном теле существуют лишь продольные и поперечные волны. Поэтому явления отражения и преломления на границе раздела жидкость — твердое тело сложнее ранее разобранных случаев.

Если плоская волна падает на границу жидкость — твердое тело, то в результате взаимодействия падающей волны с неоднородностью,

обусловленной границей, могут возникнуть следующие дополнительные волны: продольная в жидкости, продольная в твердом теле и поперечная в твердом теле.

Расположим систему декартовых координат так, чтобы нормаль \mathbf{n}_1 к фронту NN падающей волны составляла с нормалью \mathbf{n}_2 к поверхности угол $180^\circ - \theta$ (рис. IX.4.1). Потенциалы падающей и отраженной волн

$$\begin{aligned}\Phi &= Ae^{j\omega t} e^{-jk(x \sin \theta - z \cos \theta)}, \\ \Phi' &= A'e^{j\omega t} e^{-jk(x \sin \theta' + z \cos \theta')}\end{aligned}$$

образуют звуковое поле в жидкости с потенциалом

$$\varphi = \Phi + \Phi' = e^{j\omega t} (Ae^{-jk(x \sin \theta - z \cos \theta)} + A'e^{-jk(x \sin \theta' + z \cos \theta')}). \quad (\text{IX.4.1})$$

Потенциал продольной волны в твердом теле

$$\Phi_1 = A_1 e^{j\omega t} e^{-jk_1(x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)}. \quad (\text{IX.4.2})$$

Кроме того, в твердом теле появляется сдвиговая волна, определяемая векторным потенциалом \mathbf{A} . Векторный потенциал сдвиговой волны и вектор сдвиговой деформации взаимно перпендикулярны. Вектор сдвиговой деформации лежит в плоскости падения, поэтому из трех компонент векторного потенциала в твердом теле отличается от нуля только компонента по оси Y :

$$A_y = B e^{j\omega t} e^{-jk_\tau(x \sin \theta_\tau - z \cos \theta_\tau)}. \quad (\text{IX.4.3})$$

Комплексные амплитуды A'_1 , A_1 , B и углы θ' , θ_1 определим из граничных условий. При $z=0$ нормальные составляющие деформации в жидкости и твердом теле равны друг другу:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial z} + \frac{\partial A_y}{\partial z}.$$

Учитывая (IX.4.1) – (IX.4.3), получаем

$$\begin{aligned}&k \left(\cos \theta e^{-jkx \sin \theta} - \cos \theta' \frac{A'}{A} e^{jkx \sin \theta} \right) = \\ &= k_1 \cos \theta_1 \frac{A_1}{A} e^{-jk_1 x \sin \theta_1} + \frac{B}{A} k_2 \sin \theta_\tau e^{-jk_\tau x \sin \theta_\tau}.\end{aligned} \quad (\text{IX.4.4})$$

Уравнение (IX.4.4) может иметь решения для всех значений x , если экспоненциальные множители равны друг другу:

$$e^{-jkx \sin \theta} = e^{jkx \sin \theta'} = e^{-jk_1 x \sin \theta_1} = e^{-jk_\tau x \sin \theta_\tau},$$

или

$$k \sin \theta = -k \sin \theta' = k_1 \sin \theta_1 = k_\tau \sin \theta_\tau. \quad (\text{IX.4.5})$$

Таким образом, при прохождении плоской волны через границу жидкость – твердое тело возникает трансформация продольной волны:

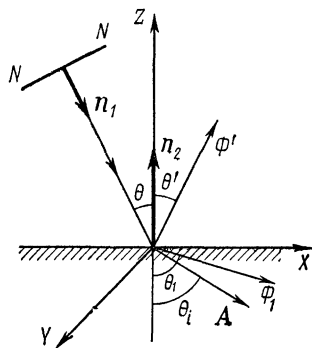


Рис. IX.4.1

в твердом теле появляются продольная и сдвиговая волны. Для углов преломления этих волн выполняются следующие равенства:

$$\sin \theta_1 = \frac{c_l}{c} \sin \theta, \quad \sin \theta_\tau = \frac{c_\tau}{c} \sin \theta_1.$$

Так как $c_l > c_\tau$, то угол преломления продольной волны больше угла преломления волны сдвига и является функцией коэффициента Пуассона:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_\tau} = \sqrt{2 \frac{1-\sigma}{1-2\sigma}}.$$

Используя закон преломления (IX.4.5), получаем из (IX.4.4) первое уравнение для нахождения амплитуд A'/A_1 , A_1/A и B/A :

$$k_2 \cos \theta \left(1 - \frac{A'}{A}\right) = k_1 \cos \theta_1 \frac{A_1}{A} + k_\tau \sin \theta_\tau \frac{B_1}{A}. \quad (\text{IX.4.6})$$

Для составления недостающих уравнений воспользуемся граничными условиями при $z=0$:

$$\sigma_{zz} + \sigma'_{zz} = \sigma_{zzl} + \sigma_{zz\tau}, \quad 0 = \sigma_{xzl} + \sigma_{xz\tau},$$

где $\sigma_{ik} = \lambda u_{il} \delta_{ik} + 2\mu u_{ik}$ — напряжения, определяемые законом Гука. В частности, $\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$; $\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial u_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x}$; $\sigma_{yz} = 0$.

Для жидкости модуль сдвига равен нулю: $\mu = 0$. Поэтому граничные условия записываем в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} \lambda \Delta \varphi &= \lambda_1 \Delta \varphi_1 + 2\mu \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right), \\ 0 &= 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{IX.4.7})$$

Заменив в уравнениях (IX.4.7)

$$\Delta \varphi = -\omega^2 \varphi / c^2, \quad \Delta \varphi_1 = -\omega^2 \varphi_1 / c_l^2, \quad (\text{IX.4.8})$$

получаем

$$\begin{aligned} -\lambda \frac{\omega^2}{c^2} \varphi &= -\frac{\lambda_1 \omega^2}{c_l^2} \varphi_1 + 2\mu_1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial z} \right), \\ 0 &= 2 \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}. \end{aligned} \quad (\text{IX.4.9})$$

Представляя упругие постоянные в виде

$$\lambda = \rho c^2 = \rho \frac{\omega^2}{k^2}, \quad \lambda_1 + 2\mu_1 = \rho_1 \frac{\omega^2}{k_1^2}, \quad \mu_1 = \rho_1 \frac{\omega^2}{k_\tau^2}$$

и воспользовавшись (IX.4.1) — (IX.4.3), из (IX.4.9) найдем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \left(1 + \frac{A'}{A}\right) &= \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{k_\tau^2} \sin^2 \theta_1\right) \frac{A_1}{A} - \sin 2\theta_\tau \frac{B_1}{A}, \\ k_1^2 \frac{A_1}{A} \sin 2\theta_1 + k_\tau^2 \frac{B_1}{A} \sin 2\theta_\tau &= 0. \end{aligned} \quad (\text{IX.4.10})$$

Выразив в (IX.4.5) и (IX.4.10) амплитуды A' , A_1 и B_1 через коэффициенты отражения и прохождения ($r = A'/A$, $t_1 = A_1/A$, $t_\tau = B_1/A$), получим систему уравнений относительно r , t_1 и t_τ :

$$\begin{aligned} k \cos \theta (1 - r) &= (k_1 \cos \theta_1) t_1 + (k_\tau \sin \theta_\tau) t_\tau, \\ \frac{1}{m} (1 + r) &= \left(1 - 2 \frac{k_1^2}{k_\tau^2} \sin^2 \theta_1\right) t_1 = (\sin 2\theta_\tau) t_\tau, \\ 0 &= (k_1^2 \sin 2\theta_1) t_1 + (k_\tau^2 \cos 2\theta_\tau) t_\tau. \end{aligned} \quad (\text{IX.4.11})$$

Ее решением являются следующие зависимости для искоемых коэффициентов:

$$r = \frac{\varepsilon\beta^2 + \varepsilon_\tau\alpha^2 - 1}{\varepsilon_1\beta^2 + \varepsilon_\tau\alpha^2 + 1}, \quad (\text{IX.4.12})$$

$$t_1 = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{2\varepsilon_1\beta}{\varepsilon_1\beta^2 + \varepsilon_\tau\alpha^2 + 1}, \quad (\text{IX.4.13})$$

$$t_\tau = -\frac{\rho}{\rho_1} \frac{2\varepsilon_\tau\alpha}{\varepsilon_1\beta^2 + \varepsilon_\tau\alpha^2 + 1}, \quad (\text{IX.4.14})$$

где $\varepsilon_1 = z_1/z$; $\varepsilon_\tau = z_\tau/z$; $z_1 = \rho_1 c_1 / \cos \theta_1$; $z_\tau = \rho_1 c_\tau / \cos \theta_\tau$; $r = \rho c / \cos \theta$; $\beta = \cos 2\theta_\tau$; $\alpha = \sin 2\theta_\tau$.

Если в формулах (IX.4.12) — (IX.4.14) обозначить $\varepsilon_1\beta^2 + \varepsilon_\tau\alpha^2 = \varepsilon_\theta$, то коэффициент отражения будет иметь вид

$$r = \frac{\varepsilon_\theta - 1}{\varepsilon_\theta + 1}.$$

Рассмотрим некоторые случаи прохождения звуковых волн через плоскую границу раздела жидкость — твердое тело.

При нормальном падении плоской волны $\theta = 0$; $\theta_1 = \theta_\tau = 0$. Отсюда следует, что $\alpha = \sin 2\theta_\tau = 0$, $\beta = \cos 2\theta_\tau = 1$. Таким образом, коэффициенты отражения и прохождения при $\theta = 0$

$$r = \frac{\varepsilon - 1}{\varepsilon + 1}, \quad t_1 = \frac{\rho}{\rho_1} \frac{2\varepsilon}{\varepsilon + 1}, \quad t_\tau = 0,$$

где $\varepsilon = \rho_1 c_1 / (\rho c)$.

Следовательно, при нормальном падении коэффициент отражения r определяется только отношением удельных волновых сопротивлений твердого тела и жидкости, коэффициент прохождения t_1 для продольных волн, кроме того, зависит от отношения плотностей, коэффициент прохождения t_τ сдвиговых волн равен нулю.

Дальнейший анализ требует уточнения соотношения между c , c_1 и c_τ . Обычно $c < c_\tau < c_1$. Этому случаю соответствует соотношение между углами $\theta < \theta_\tau < \theta_1$. При увеличении угла падения углы θ и θ_τ также увеличиваются, поэтому можно найти такое значение угла падения θ_{01} , при котором угол преломления $\theta_1 = 90^\circ$. Очевидно, θ_{01} удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\frac{\sin \theta_{01}}{c} = \frac{1}{c_1}, \quad \theta_{01} = \arcsin \frac{c}{c_1}.$$

Угол θ_{01} называют первым углом полного внутреннего отражения. При условии $\theta > \theta_{01}$ угол преломления для продольной волны удовлетворяет неравенству $\sin \theta_1 > (c_1/c) \sin \theta > 1$, откуда следует, что $\cos \theta_1 = \pm j \sqrt{[c_1/(c \sin \theta)]^2 - 1}$ и поэтому угол мнимый. В этом случае амплитуда

потенциала прошедшей продольной волны принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= A e^{-jk_1 (x \sin \theta_1 - z \cos \theta_1)} = A_1 e^{-jk_1 \left(x \frac{c_1}{c} \sin \theta - z \sqrt{1 - \left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta_1} \right)} = \\ &= A_1 e^{-j \frac{\omega}{c_1} x \frac{c_1}{c} \sin \theta} e^{j \left(j k_1 \sqrt{\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta - 1} z \right)} = \\ &= A_1 e^{\pm \frac{\omega}{c_1} \sqrt{\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta - 1} z} e^{-j \frac{\omega}{c} x \sin \theta}.\end{aligned}$$

При удалении от границы ($z \rightarrow \infty$) потенциал $\varphi \rightarrow 0$, поэтому из двух знаков перед квадратным корнем имеет смысл знак минус, а вместо z — расстояние $|z|$:

$$\varphi_1 = A_1 e^{-\sqrt{\frac{c_1^2}{c^2} \sin^2 \theta - 1} |z|} e^{-j x \frac{\omega}{c} \sin \theta} e^{j \omega t}, \quad (\text{IX.4.15})$$

где $A_1 e^{-\sqrt{\frac{c_1^2}{c^2} \sin^2 \theta - 1} |z|}$ — амплитуда волны; множитель $e^{j(\omega t - \frac{\omega}{c} x \sin \theta)}$ указывает на то, что волна распространяется с фазовой скоростью $c/\sin \theta$ в положительном направлении X . Иначе говоря, волна скользит по поверхности раздела. У самой поверхности амплитуда равна A_1 . С увеличением расстояния $|z|$ амплитуда уменьшается по закону $A_1 e^{-|z|/h}$, причем

$$h = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta - 1}} \quad (\text{IX.4.16})$$

— глубина проникновения волны.

Если угол падения достигнет значения, при котором для сдвиговой волны

$$\sin \theta_\tau = (c_\tau/c) \sin \theta_{02} = 1 \quad (\text{IX.4.17})$$

при $\theta_{02} = \arcsin(c/c_\tau)$, то возникает явление полного внутреннего отражения сдвиговой волны. Однако в жидкости сдвиговая волна не распространяется, поскольку для нее модуль сдвига равен нулю. Если угол падения $\theta \geq \theta_{02}$, то вдоль границы раздела кроме продольной неоднородной волны будет распространяться также сдвиговая неоднородная волна с фазовой скоростью $c_\tau/\sin \theta$.

Интересно рассмотреть условия возникновения в твердом теле только одной сдвиговой волны.

На основании (IX.4.13) коэффициент прохождения продольных волн $t_1 = 0$, если $\beta = \cos 2\theta_\tau = \theta$ или $\theta_\tau = 45^\circ$, т. е. при угле преломления сдвиговой волны, равном 45° , продольная волна во вторую среду не проходит. В этом случае угол падения определяется формулой

$$\sin \theta = \frac{c}{c_\tau} \sin 45^\circ = \frac{c}{c_\tau} \frac{\sqrt{2}}{2}. \quad (\text{IX.4.18})$$

Если угол падения больше, чем угол полного внутреннего отражения, т. е. $\theta > \arcsin(c/c_1)$, $\sin \theta_1 > 1$, то $\cos \theta_1 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_1} = -j \sqrt{\sin^2 \theta_1 - 1}$. Поэтому приведенный импеданс границы раздела —

также мнимая величина:

$$\varepsilon_1 = j \frac{\rho_1 c_1 / \cos \theta_1}{\rho c / |\cos \theta|} = j |\varepsilon_1|,$$

или

$$\varepsilon_1 = j \frac{z_1}{|z|} = j |\varepsilon_1|,$$

где $|\cos \theta_1| = \sqrt{\left(\frac{c_1}{c}\right)^2 \sin^2 \theta - 1}$.

В этом случае коэффициент отражения является комплексной величиной:

$$r = \frac{j |\varepsilon_1| \beta^2 + |\varepsilon_1| \alpha^2 - 1}{j |\varepsilon_1| \beta^2 + |\varepsilon_1| \alpha^2 + 1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2 \beta^4 + (\varepsilon_1 \alpha^2 - 1)^2}{\varepsilon_1^2 \beta^4 + (\varepsilon_1 \alpha^2 + 1)^2}} e^{-j\varphi}. \quad (\text{IX.4.19})$$

Здесь $\beta = \cos 2\theta_\tau$; $\alpha = \sin 2\theta_\tau$; $\varphi = \arctg \frac{|\varepsilon_1| \beta^2}{|\varepsilon_1| \alpha^2 - 1} - \arctg \frac{|\varepsilon_1| \beta^2}{|\varepsilon_1| \alpha^2 + 1}$.

На рис. IX.4.2 показаны графики зависимостей амплитуды 1 и фазы 2 коэффициента отражения на границе вода — алюминий от угла падения. Графики построены согласно (IX.4.19); кружками обозначены экспериментальные данные. На кривых видны особенности при 13° и 29° . Первый угол совпадает с $\arcsin(c/c_1)$, второй — с $\arcsin(c/c_\tau)$.

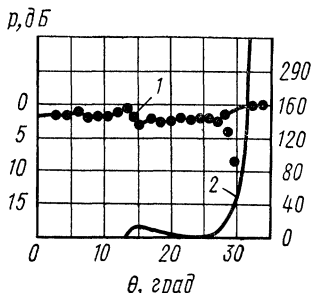


Рис. IX.4.2

§ IX.5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

Волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух различных сред, нашли широкое применение в науке и технике. Распространение электромагнитной волны вдоль металлического проводника является примером волн такого типа. Электромагнитная волна низкой частоты распространяется вдоль поверхности земли, чем и обусловлена возможность дальнейшей связи на низких частотах. Хорошая радиосвязь на средних частотах обеспечивается волноводными свойствами ионизированного слоя атмосферы. Не меньшее значение имеет распространение упругих волн вдоль граничных поверхностей упругих тел. В частности, поверхностные упругие волны все чаще находят применение в ультразвуковой дефектоскопии.

Познакомимся с классическим методом изучения поверхностных волн. Рассмотрим следующую двумерную задачу: найти условия распространения вдоль свободной плоской поверхности упругого полупространства волн малой амплитуды.

Для решения задачи расположим прямоугольную систему координат так, чтобы ось X совпала с направлением внешней нормали к поверхности.

Известно, что для малых колебаний в упругой среде процессы подчиняются волновому уравнению типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0. \quad (\text{IX.5.1})$$