также мнимая величина:

$$\varepsilon_1 = j\,\frac{\rho_1 c_1/\cos\theta_1}{\rho c/\,|\cos\theta\,|} = j\,|\,\varepsilon_1\,|,$$

или

$$\varepsilon_1 = j\,\frac{z_1}{|\,z\,|} = j\,|\,\varepsilon_1\,|,$$

где $|\cos\theta_1| = \sqrt{\left(\frac{c_1}{c_1}\right)^2 \sin^2\theta - 1}$.

В этом случае коэффициент отражения является комплексной величиной:

$$r = \frac{j\,|\,\varepsilon_1\,|\,\beta^2 + |\,\varepsilon_\tau\,|\,\alpha^2 - 1}{j\,|\,\varepsilon_1\,|\,\beta^2 + |\,\varepsilon_\tau\,|\,\alpha^2 + 1} = \sqrt{\frac{\varepsilon_1^2\beta^4 + (\varepsilon_\tau\alpha^2 - 1)^2}{\varepsilon_1^2\beta^4 + (\varepsilon_\tau\alpha^2 + 1)}}\, e^{-j\varphi}. \qquad \text{(IX.4.19)}$$

Здесь $\beta = \cos 2\theta_\tau$; $\alpha = \sin 2\theta_\tau$; $\varphi = \operatorname{arctg}\frac{|\,\varepsilon\,|\,\beta^2}{|\,\varepsilon_\tau\,|\,\alpha^2 - 1} - \operatorname{arctg}\frac{|\,\varepsilon_1\,|\,\beta^2}{|\,\varepsilon_\tau\,|\,\alpha^2 + 1}$.

На рис. IX.4.2 показаны графики зависимостей амплитуды *1* и фазы *2* коэффициента отражения на границе вода — алюминий от угла падения. Графики построены согласно (IX.4.19); кружками обозначены экспериментальные данные. На кривых видны особенности при 13° и 29°. Первый угол совпадает с $\arcsin(c/c_1)$, второй — с $\arcsin(c/c_\tau)$.

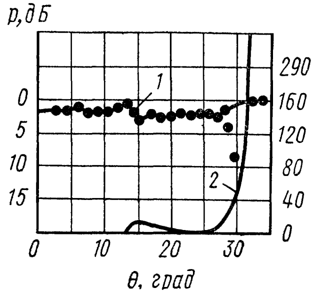

Рис. IX.4.2

## § IX.5. ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ

Волны, распространяющиеся вдоль границы раздела двух различных сред, нашли широкое применение в науке и технике. Распространение электромагнитной волны вдоль металлического проводника является примером волн такого типа. Электромагнитная волна низкой частоты распространяется вдоль поверхности земли, чем и обусловлена возможность дальнейшей связи на низких частотах. Хорошая радиосвязь на средних частотах обеспечивается волноводными свойствами ионизированного слоя атмосферы. Не меньшее значение имеет распространение упругих волн вдоль граничных поверхностей упругих тел. В частности, поверхностные упругие волны все чаще находят применение в ультразвуковой дефектоскопии.

Познакомимся с классическим методом изучения поверхностных волн. Рассмотрим следующую двумерную задачу: найти условия распространения вдоль свободной плоской поверхности упругого полупространства волн малой амплитуды.

Для решения задачи расположим прямоугольную систему координат так, чтобы ось $X$ совпадала с направлением внешней нормали к поверхности.

Известно, что для малых колебаний в упругой среде процессы подчиняются волновому уравнению типа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \Delta u = 0. \qquad \text{(IX.5.1)}$$

В соответствии с поставленной задачей будем искать решение уравнения (IX.5.1) в виде плоской волны, распространяющейся вдоль оси $X$ с фазовой скоростью $c_R$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(z)\, e^{j(\omega t - kx)}, \qquad (IX.5.2)$$

где $k$ — некоторая функция от $c_R$.

Задача состоит в отыскании функции $\mathbf{f}(z)$ и зависимости фазовой скорости от частоты и материальных констант среды при условии, что смещение (IX.5.2) удовлетворяет волновому уравнению (IX.5.1), граничным дополнительным условиям для компонент смешения. (Граничные и дополнительные условия сформулируем по ходу решения задачи.)

Подставив предполагаемое решение (IX.5.2) в волновое уравнение, получим уравнение для функции $f(z)$:

$$\frac{d^2 \mathbf{f}}{dz^2} = \left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right)\mathbf{f}. \qquad (IX.5.3)$$

В данном случае определяем волну, распространяющуюся только в направлении $X$, поэтому искомая функция $f(z)$ не должна быть периодической относительно координаты $z$. Следовательно, волновое число искомой поверхностной волны должно удовлетворять неравенству

$$k^2 - \frac{\omega^2}{c^2} > 0. \qquad (IX.5.4)$$

В этом случае зависимость $\mathbf{f}(z)$ определяется экспоненциальной функцией $e^{\pm\delta z}$ $\left(\delta = \sqrt{k^2 - \omega^2/c^2}\right)$. Искомое смещение частиц среды имеет вид

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{j(\omega t - kx)} e^{\pm\delta z}. \qquad (IX.5.5)$$

Из двух знаков выберем тот, который обеспечивает убывание функции $u_0 e^{\delta z}$ до нуля при неограниченном отрицательном значении $z$, т. е. знак плюс (+):

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_0 e^{\delta z} e^{j(\omega t - kx)} \quad (z < 0). \qquad (IX.5.6)$$

Известно, что вектор смещения в изотропном твердом теле может быть представлен в виде суммы деформаций сдвига $\mathbf{u}_\tau$ и растяжения $\mathbf{u}_l$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_\tau = \nabla\varphi + [\nabla \mathbf{A}],$$

причем каждое из смещений $\mathbf{u}_l$ и $\mathbf{u}_\tau$ подчиняется волновому уравнению типа (IX.5.1). Отличие этих волновых уравнений друг от друга состоит лишь в том, что в уравнениях для смещений $\mathbf{u}_l$ фазовая скорость $c = c_l = \sqrt{(2\mu + \lambda)/\rho}$, а в уравнениях для $\mathbf{u}_\tau$ она равна $c = c_\tau = \sqrt{\mu/\rho}$. Таким образом, для граничной волны закон смещения можно записать в виде

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u}_{0l} e^{\delta_l z} + \mathbf{u}_{0\tau} e^{\delta_\tau z}) e^{j(\omega t - kx)} \quad (z < 0), \qquad (IX.5.7)$$

где $\delta_l = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_l^2}$; $\delta_\tau = \sqrt{k^2 - \omega^2/c_\tau^2}$.

В решении (IX.5.7) остается все еще неизвестной связь волнового числа $k$ поверхостной волны с волновыми числами продольной и поперечной волн. Кроме того, не определены соотношения между компонентами амплитуд смещений $\mathbf{u}_{0l}$ и $\mathbf{u}_{0\tau}$. Для дальнейшего развития решения задачи обратимся к граничным условиям на свободной поверхности

$$\sigma_{ik}n_k = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3;\ k = 1,\ 2,\ 3) \tag{IX.5.8}$$

и к условиям, определяющим свойства сдвиговой и продольной составляющих смещения:

$$\operatorname{div} \mathbf{u}_\tau = 0,\ \operatorname{rot} \mathbf{u}_l = 0. \tag{IX.5.9}$$

Условия (IX.5.8) для данной задачи при $z = 0$ представляются в виде

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \tag{IX.5.10}$$

где

$$\begin{gathered}\sigma_{xz} = 2\mu u_{xz} = \mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right),\\ \sigma_{yz} = 2\mu u_{yz} = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right),\\ \sigma_{zz} = \lambda\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) = \lambda\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).\end{gathered} \tag{IX.5.11}$$

Так как функция (IX.5.7) не зависит от координаты $y$, то $\partial u_z/\partial y = \partial u_x/\partial y = 0$ и согласно (IX.5.10) $\partial u_y/\partial z = 0$, т. е. смещение, перпендикулярное направлению распространения, не зависит от глубины $z$. Из физических соображений следует, что $u_y = 0$ при $z \to \infty$, поэтому она равна нулю для всех значений $z$.

Таким образом, в поверхностной волне не существует смещения, которое было бы перпендикулярно нормали поверхности и направлению распространения волны: $u_y = 0$. Следовательно, граничные условия (IX.5.10) при $z = 0$ сводятся к уравнениям

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0,\quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0, \tag{IX.5.12}$$

а условия (IX.5.9) сводятся к уравнениям

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_{\tau x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{\tau z}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u_{lz}}{\partial y} - \frac{\partial u_{ly}}{\partial z} = 0,\\ \frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0,\ \frac{\partial u_{ly}}{\partial x} - \frac{\partial u_{lx}}{\partial y} = 0.\end{gathered}$$

Учитывая, что смещение $u$ не зависит от $y$, получаем:

$$\frac{\partial u_{\tau x}}{\partial x} + \frac{\partial u_{\tau z}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial u_{lx}}{\partial z} - \frac{\partial u_{lz}}{\partial x} = 0. \tag{IX.5.13}$$

Подставив компоненты смещения $u_l$ и $u_\tau$ из (IX.5.7) в уравнения (XI.5.12) и (IX.5.13), получим однородную систему алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}(\delta_l - jk)A_1 + (\delta_\tau - jk)A_2 = 0,\\ -jkA_1 - jkA_2 + \delta_l A_3 + \delta_\tau A_4 = 0,\\ A_2 + A_4 = 0,\qquad \delta_l A_1 + jkA_3 = 0,\end{gathered} \tag{IX.5.14}$$

где $A_1 = u_{0lx}$; $A_2 = u_{0\tau x}$; $A_3 = u_{0lz}$; $A_4 = u_{0\tau z}$, с главным детерминантом

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_l - jk & \delta_\tau - jk & 0 & 0 \\ -jk & -jk & \delta_l & \delta_\tau \\ 0 & 1 & & 1 \\ \delta_l & 0 & jk & 0 \end{vmatrix}.$$

Приравнивая определитель системы (IX.5.14) $\Delta$ к нулю и обозначая $c_R/c_\tau = \omega/c_\tau k = \zeta$, получаем дисперсионное уравнение

$$\zeta^6 - 8\zeta^4 + 8\zeta^2\left(3 - 2\frac{c_\tau^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_\tau^2}{c_l^2}\right) = 0. \qquad \text{(IX.5.15)}$$

Отсюда следует, что число $\zeta$ зависит только от отношения $c_\tau^2/c_l^2$, которое является функцией коэффициента Пуассона: $c_\tau^2/c_l^2 = (1-2\sigma)/[2(1-\sigma)] < 1$.

Из физических соображений величина $\zeta$ должна быть вещественной и положительной, причем $k^2 - \omega^2/c_\tau^2 > 1$, т. е. $\omega^2/(k^2c_\tau^2) = \zeta^2 < 1$.

Исследование уравнения (IX.5.15) показывает, что оно имеет только один корень, удовлетворяющий указанным требованиям, так что для каждого отношения $c_\tau/c_l$ получается только одно вещественное значение $\zeta$.

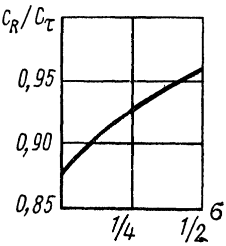

Рис. IX.5.1

Скорость распространения поверхностной волны пропорциональна числу $\zeta$.

$$c_R = \zeta c_\tau.$$

Зависимость $\zeta$ отношения скорости волн Рэлея $c_R$ к скорости сдвиговой волны $c_\tau$ в твердом теле от коэффициента Пуассона $\sigma$ изображена на рис. IX.5.1. По найденному параметру $\zeta$ можно найти волновое число. Поскольку корень $\zeta_R$ дисперсионного уравнения не зависит от частоты, произведение $\zeta_R c_\tau$ также не зависит от частоты и является скоростью волны Рэлея $c_R = \zeta_R c_\tau$, где $\zeta_R$ определяется из приведенного графика или может быть вычислено по приближенной формуле

$$\zeta_R = \frac{0{,}874 + 1{,}12\sigma}{1+\sigma}. \qquad \text{(IX.5.16)}$$

При изменении $\sigma$ от 0 до $^1/_2$ значения $\zeta$ изменяются от 0,87 до 0,955.

## § IX.6. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ

Нормальные волны распространяются в протяженных упругих телах, ограниченных свободными поверхностями, причем направление волнового вектора этих волн перпендикулярно нормали свободной поверхности.

Рассмотрим общую схему решения задачи о распространении нормальных волн.