где $A_1 = u_{0lx}$; $A_2 = u_{0\tau x}$; $A_3 = u_{0lz}$; $A_4 = u_{0\tau z}$, с главным детерминантом

$$\Delta = \begin{vmatrix} \delta_l - jk & \delta_\tau - jk & 0 & 0 \\ -jk & -jk & \delta_l & \delta_\tau \\ 0 & 1 & & 1 \\ \delta_l & 0 & jk & 0 \end{vmatrix}.$$

Приравнивая определитель системы (IX.5.14) Δ к нулю и обозначая $c_R/c_\tau = \omega/c_\tau k = \zeta$, получаем дисперсионное уравнение

$$\zeta^6 - 8\zeta^4 + 8\zeta^2\left(3 - 2\frac{c_\tau^2}{c_l^2}\right) - 16\left(1 - \frac{c_\tau^2}{c_l^2}\right) = 0. \qquad \text{(IX.5.15)}$$

Отсюда следует, что число ζ зависит только от отношения c_τ^2/c_l^2, которое является функцией коэффициента Пуассона: $c_\tau^2/c_l^2 = (1-2\sigma)/[2(1-\sigma)] < 1$.

Из физических соображений величина ζ должна быть вещественной и положительной, причем $k^2 - \omega^2/c_\tau^2 > 1$, т. е. $\omega^2/(k^2 c_\tau^2) = \zeta^2 < 1$.

Исследование уравнения (IX.5.15) показывает, что оно имеет только один корень, удовлетворяющий указанным требованиям, так что для каждого отношения c_τ/c_l получается только одно вещественное значение ζ.

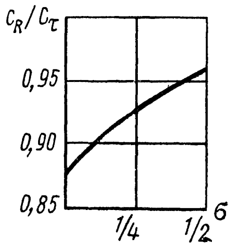

Рис. IX.5.1

Скорость распространения поверхностной волны пропорциональна числу ζ.

$$c_R = \zeta c_\tau.$$

Зависимость ζ отношения скорости волн Рэлея c_R к скорости сдвиговой волны c_τ в твердом теле от коэффициента Пуассона σ изображена на рис. IX.5.1. По найденному параметру ζ можно найти волновое число. Поскольку корень ζ_R дисперсионного уравнения не зависит от частоты, произведение $\zeta_R c_\tau$ также не зависит от частоты и является скоростью волны Рэлея $c_R = \zeta_R c_\tau$, где ζ_R определяется из приведенного графика или может быть вычислено по приближенной формуле

$$\zeta_R = \frac{0{,}874 + 1{,}12\sigma}{1+\sigma}. \qquad \text{(IX.5.16)}$$

При изменении σ от 0 до $^1/_2$ значения ζ изменяются от 0,87 до 0,955.

§ IX.6. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В ПЛАСТИНАХ

Нормальные волны распространяются в протяженных упругих телах, ограниченных свободными поверхностями, причем направление волнового вектора этих волн перпендикулярно нормали свободной поверхности.

Рассмотрим общую схему решения задачи о распространении нормальных волн.

Вектор деформации может быть представлен в виде суммы двух векторов — потенциального $\mathbf{u}_l$ и соленоидального $\mathbf{u}_\tau$:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_l + \mathbf{u}_\tau.$$

Выражая вектор продольной деформации $\mathbf{u}_l$ через скалярный потенциал φ, а вектор деформации сдвига $\mathbf{u}_\tau$ через векторный потенциал $\mathbf{A}$, найдем

$$\mathbf{u} = \nabla\varphi + [\nabla\mathbf{A}]. \qquad \text{(IX.6.1)}$$

Подставив смещение $\mathbf{u}$ в виде суммы (IX.6.1) в уравнение динамики (IX.3.1), найдем уравнения для функций φ и $\mathbf{A}$:

$$c_l^2\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad \text{(IX.6.2)}$$

$$c_\tau^2\nabla^2\mathbf{A} = \frac{\partial^2\mathbf{A}}{\partial t^2}, \qquad \text{(IX.6.3)}$$

где $c_l^2 = \frac{2\mu+\lambda}{\rho}$, $c_\tau^2 = \frac{\mu}{\rho}$.

Кроме того,

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = 0. \qquad \text{(IX.6.4)}$$

Система уравнений (IX.6.2) и (IX.6.3) содержит четыре уравнения относительно четырех функций φ, A_x, A_y, A_z. Уравнение (IX.6.4) дает зависимость между тремя функциями A_x, A_y, A_z, поэтому из четырех функций линейно независимыми остаются три.

Из множества решений уравнений (IX.6.2) и (IX.6.3) реализуются только функции, которые удовлетворяют граничным условиям и условию затухания на бесконечности. Если изотропное упругое тело ограничено свободной поверхностью, то в качестве граничных условий используют равенство нулю нормальных компонент тензора напряжения: $\sigma_{ik}n_k = 0$.

В зависимости от формы свободной поверхности в качестве решений выступают те или иные волновые функции, характеризующие различные виды волн, поэтому дальнейшее изучение вопроса должно быть связано с конкретным видом граничной поверхности. Рассмотрим случай распространения нормальных волн при условии, что ограничивающая поверхность состоит из совокупности двух безграничных плоскостей.

Пусть пластина ограничена плоскостями $x = \pm b$ и в направлениях Y и Z безгранична. Условия исчезновения напряжений на границе сводят к шести уравнениям (трем уравнениям для поверхности $x = b$ и трем для поверхности $x = -b$):

$$\sigma_{xx} \underset{x=\pm b}{=} 0, \quad \sigma_{yx} \underset{x=\pm b}{=} 0, \quad \sigma_{zx} \underset{x=\pm b}{=} 0. \qquad \text{(IX.6.5)}$$

В качестве решений (IX.6.2) и (IX.6.3) рассмотрим следующие функции:

$$\begin{aligned} \varphi &= (A\cos\alpha x + B\sin\alpha x)\, e^{j(\omega t-\gamma z)}, \\ A_x &= (C\cos\beta x + D\sin\beta x)\, e^{j(\omega t-\gamma z)}, \\ A_y &= (E\cos\beta x + F\sin\beta x)\, e^{j(\omega t-\gamma z)}, \\ A_z &= (G\cos\beta x + H\sin\beta x)\, e^{j(\omega t-\gamma z)}. \end{aligned} \qquad \text{(IX.6.6)}$$

Непосредственная подстановка этих решений в волновые уравнения (IX.6.2) и (IX.6.3) дает следующие соотношения между величинами α, β, γ, частотой ω и скоростями c_l и c_τ:

$$\beta^2-\gamma^2=\frac{\omega^2}{c_\tau^2}; \tag{IX.6.7}$$

$$\alpha^2-\gamma^2=\frac{\omega^2}{c_\tau^2}. \tag{IX.6.8}$$

Найдем формулы для компонент смещения $\mathbf{u}$. Учитывая, что потенциальные функции не зависят от координаты y, из (IX.6.1) получаем:

$$\begin{gathered} u_x=\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad u_y=-\frac{\partial A_z}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial z}, \\ u_z=\frac{\partial\varphi}{\partial z}+\frac{\partial A_y}{\partial x}. \end{gathered} \tag{IX.6.9}$$

Компоненты тензора напряжения связаны с компонентами смещения законом Гука:

$$\begin{gathered} \sigma_{xx}=(\lambda+2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x}+\lambda\frac{\partial u_z}{\partial z}, \quad \sigma_{yx}=\mu\frac{\partial u_y}{\partial x}, \\ \sigma_{zx}=\mu\left(\frac{\partial u_x}{\partial z}+\frac{\partial u_z}{\partial x}\right). \end{gathered} \tag{IX.6.10}$$

Заменяя по формулам (IX.6.9) компоненты смещения, получаем:

$$\begin{gathered} \sigma_{xx}=\rho\,(c_l^2-2c_\tau^2)\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial z}-k_l^2\varphi\right)-2\rho c_\tau^2\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial z}-\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right), \\ \sigma_{yx}=\rho c_\tau^2\left(-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_y}{\partial x\,\partial y}\right), \\ \sigma_{2x}=\rho c_\tau^2\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y\,\partial z}-2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z}\right). \end{gathered} \tag{IX.6.11}$$

После подстановки в уравнения (IX.6.5) и (IX.6.4) потенциальных функций (IX.6.6), положив $x=\pm b$, получим систему из восьми однородных линейных уравнений относительно восьми коэффициентов $(A,\ B,\ C,\ D,\ E,\ F,\ G,\ H)$:

$$\begin{gathered} c\cos\alpha bA+c\sin\alpha bB-f\sin\beta bE+f\cos\beta bF=0, \\ c\cos\alpha bA-c\sin\alpha bB+f\sin\beta bE+f\cos\beta bF=0, \\ -h\sin\beta bC+h\cos\beta bD+\beta^2\cos\beta bG+\beta^2\sin\beta bH=0, \\ h\sin\beta bC+h\cos\beta bD+\beta^2\cos\beta bG-\beta^2\sin\beta bH=0, \\ -d\sin\alpha bA+d\cos\alpha bB+g\cos\beta bE+g\sin\beta bF=0, \\ d\sin\alpha bA+d\cos\alpha bB+g\cos\beta bE-g\sin\beta bF=0, \\ -\beta\sin\beta bC+\beta\cos\beta bD-j\gamma\cos\beta bG-j\gamma\sin\beta bH=0, \\ \beta\sin\beta bC+\beta\cos\beta bD-j\gamma\cos\beta bG+j\gamma\sin\beta bH=0, \end{gathered} \tag{IX.6.12}$$

где $c=\rho c_l^2\alpha^2+\rho\,(c_l^2-2c_\tau^2)\,\gamma^2$; $d=-j2\alpha\gamma$; $f=-j2\mu\gamma\beta$; $g=\gamma^2-\beta^2$; $h=-j\gamma\beta$.

Однородные линейные уравнения имеют независимые решения, если главный определитель системы равен нулю. В данном случае, приравнивая к нулю определитель системы (IX.6.12), находим условия существования отдельных независимых решений для искомых коэффициентов.

Главный определитель системы уравнений (IX.6.12) легко представить в виде произведения четырех определителей второго порядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -j\gamma\cos\beta b & \beta\cos\beta b \\ \beta^2\cos\beta b & h\cos\beta b \end{vmatrix}, \tag{IX.6.13}$$

$$\Delta_{II} = \begin{vmatrix} -\beta\sin\beta b & -j\gamma\sin\beta b \\ -h\sin\beta b & \beta^2\sin\beta b \end{vmatrix}, \tag{IX.6.14}$$

$$\Delta_{III} = \begin{vmatrix} c\sin\alpha b & f\cos\beta b \\ -d\sin\alpha b & g\sin\beta b \end{vmatrix}, \tag{IX.6.15}$$

$$\Delta_{IV} = \begin{vmatrix} g\cos\beta b & \alpha\cos\alpha b \\ f\sin\beta b & c\sin\alpha b \end{vmatrix}. \tag{IX.6.16}$$

Таким образом, условие существования независимых решений системы (IX.6.12) таково:

$$\Delta_I \cdot \Delta_{II} \cdot \Delta_{III} \cdot \Delta_{IV} = 0.$$

Оно выполняется при равенстве нулю одного из четырех детерминантов. При этом получаются следующие соотношения между компонентами смещения:

$$\begin{gathered} A = B = C = E = F = H = 0, \\ u_x = 0, \\ u_y = (\beta G - j\gamma D)\sin\beta x e^{j(\omega t - \gamma z)}, \\ u_z = 0 \end{gathered} \tag{IX.6.17}$$

при $\Delta_I = 0$;

$$\begin{gathered} A = B = D = E = F = G = 0, \\ u_x = 0 \\ u_y = (-\beta H - j\gamma C)\cos\beta x e^{j(\omega t - \gamma z)} \\ u_z = 0 \end{gathered} \tag{IX.6.18}$$

при $\Delta_{II} = 0$;

$$\begin{gathered} B = C = D = E = G = H = 0, \\ u_x = -(\alpha A\sin\alpha x + j\gamma F\sin\beta x)\, e^{j(\omega t - \gamma z)}, \\ u_y = 0, \\ u_z = (\beta F\cos\beta x - j\gamma A\cos\ \gamma x)\, e^{j(\omega t - \gamma z)} \end{gathered} \tag{IX.6.19}$$

при $\Delta_{III} = 0$;

$$\begin{gathered} A = C = D = F = G = H = 0, \\ u_x = (\alpha B\cos\alpha x + j\gamma E\cos\beta x)\, e^{j(\omega t - \gamma z)}, \\ u_y = 0, \\ u_z = (-\beta E\sin\beta x - j\gamma B\sin\alpha x)\, e^{j(\omega t - \gamma z)} \end{gathered} \tag{IX.6.20}$$

при $\Delta_{IV} = 0$.

Первые два случая характерны тем, что смещение **u** направлено по оси Y, т. е. перпендикулярно направлению волны и расположено параллельно граничным плоскостям. Поэтому эти волны называют горизонтальными. С другой стороны, это сдвиговые волны. Их обозначают SH, что значит «сдвиговая горизонтальная» (термин заимствован из сейсмологии, где граничная поверхность горизонтальна).

Волны SH, для которых смещение частиц пропорционально $\sin\beta x$, называют антисимметричными; их обычно обозначают SHA (сдвиговая горизонтальная антисимметричная). Смещение, соответствующее $\Delta_{II}=0$, пропорционально $\cos\beta x$, поэтому такие волны называют симметричными. Их обозначают SHS (сдвиговая горизонтальная симметричная); наглядное представление о волнах SHA и SHS дает рис. IX.6.1.

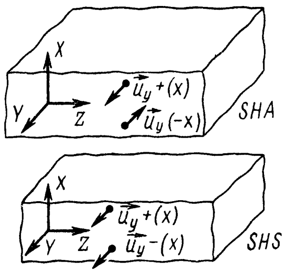

Рис. IX.6.1

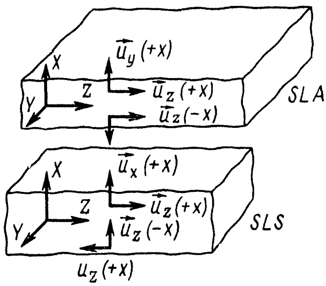

Рис. IX.6.2

Здесь изображены векторы сдвиговой деформации для верхней части $(+x)$ и нижней части $(-x)$ пластины; направление распространения волны совпадает с осью Z.

Волны, для которых выполняются дисперсионные уравнения $\Delta_{III}=0$ и $\Delta_{IV}=0$, имеют две компоненты смещения: сдвиговую u_x и объемную u_z (рис. IX.6.2).

Волны, выражаемые (IX.6.19), имеют амплитуду сдвиговой компоненты смещения, пропорциональную $\sin\beta x$. Эти волны антисимметричны, поскольку знак смещения при замене знака координаты x изменяется. Волны, соответствующие (IX.6.20), содержат сдвиговую компоненту смещения, но ее амплитуда пропорциональна $\cos\beta x$, поэтому их называют симметричными. Антисимметричные и симметричные волны, содержащие объемную составляющую деформации, обозначают символами SLA и SLS. В плоскости симметрии может распространяться только поперечная (SLA) или только продольная (SLS) волна.

Дисперсионные уравнения

Горизонтальные нормальные волны.

Смещения частиц среды при распространении горизонтальных волн в пластинах определяются формулами (IX.6.17) и (IX.6.18):

$$u_x=0,\ u_z=0,$$
$$u_y=(\rho G-j\gamma D)\sin\beta x e^{j(\omega t-\gamma z)}$$

для антисимметричной волны;

$$u_x = 0, \quad u_z = 0,$$
$$u_y = (-jH - j\gamma C)\cos\beta x e^{j(\omega t - \gamma z)}$$

для симметричной волны.

Эти волны содержат только сдвиговую компоненту смещения.

Для антисимметричной волны условием независимости коэффициентов G и D является равенство нулю детерминанта

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -j\gamma\cos\beta b & \beta\cos\beta b \\ \beta^2\cos\beta b & j\gamma\beta\cos\beta b \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\beta(\gamma^2 + \beta^2)\cos^2\beta b = 0. \tag{IX.6.21}$$

Нетривиальными решениями полученного уравнения являются

$$\beta_p = \left(p - \frac{1}{2}\right)\pi\frac{1}{b} \qquad (p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{IX.6.22}$$

Таким образом, сдвиговая горизонтальная антисимметричная волна определяется формулой

$$u_y = \left(m\frac{\pi}{b}G - j\gamma D\right)\sin\frac{m\pi}{b}xe^{j(\omega t - \gamma_m z)} \tag{IX.6.23}$$
$$(m = p - 1/2;\ p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Например, возможны следующие SHA-волны:

$$u_{y(1)} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2b}G\right)^2 + (\gamma D)^2}\sin\frac{\pi x}{2b}\cos(\omega t - \gamma_1 z - a_1),$$
$$u_{y(2)} = \sqrt{\left(\frac{3\pi}{2b}G\right)^2 + (\gamma D)^2}\sin\frac{3\pi x}{2b}\cos(\omega t - \gamma_2 z - a_2),$$
$$u_{y(3)} = \sqrt{\left(\frac{5\pi}{2b}G\right)^2 + (\gamma D)^2}\sin\frac{5\pi x}{2b}\cos(\omega t - \gamma_3 z - a_3),$$
$$u_{y(p)} = \sqrt{\left(\frac{2p-1}{2b}\pi G\right)^2 + (\gamma D)^2}\sin\left(\frac{2p-1}{2b}\pi x\right)\cos(\omega t - \gamma_4 z - a_p).$$

Здесь $a_p = \operatorname{arctg}\left(\frac{2\gamma_p D b}{2p-1}\frac{1}{\pi G}\right)$.

Для симметричных поперечных сдвиговых волн получаются формулы, отличающиеся от (IX.6.23) и (IX.6.24) только значениями числа m. Из $\Delta_{II} = 0$ получаем для SHS-волн $\beta(\gamma^2 + \beta^2)\sin^2\beta b = 0$. Его решения

$$\beta_m = m\frac{\pi}{b} \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Между β и γ для всех сдвиговых волн существует связь (IX.6.7). В данном случае зависимость γ_m от частоты представлена в виде

$$(\gamma_m b)^2 + (m\pi)^2 = \left(\frac{\omega b}{c_\tau}\right)^2. \tag{IX.6.24}$$

Зависимость между значениями $\gamma_m b$ и частотой ω для некоторых волн типа SH дана на рис. IX.6.3. На графиках по оси X вправо от нуля отложены реальная $\mathrm{Re}\,(\gamma_m b)$ волнового размера пластины (γb), а влево от нуля — мнимая часть $[\mathrm{Im}\,(\gamma_m b)]$; по оси Y — безразмерная частота $\omega b/c_\tau$, т. е. отношения частоты ω к основной частоте поперечного резонанса пластины для сдвиговых волн.

Как известно, отношение частоты ω к постоянной распространения γ равно фазовой скорости монохроматической волны. В данном случае фазовая скорость определяется из уравнения

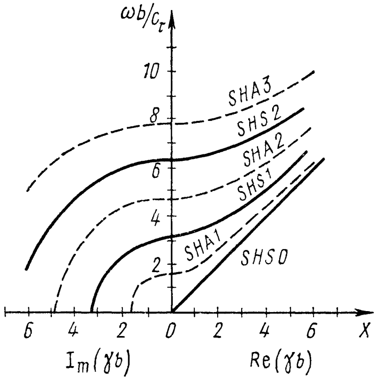

Рис. IX.6.3

$$\left(\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c_\tau^2} - \frac{1}{[\omega b/(\pi m)]^2}. \qquad \text{(IX.6.25)}$$

Удобно фазовую скорость c представлять по отношению к скорости c_τ. Тогда (IX.6.25) для безразмерной скорости преобразуется к виду

$$\left(\frac{1}{c'}\right)^2 = 1 - \frac{1}{(c'_\omega)^2}, \qquad \text{(IX.6.26)}$$

откуда

$$c' = \frac{1}{\sqrt{1-[1/(c'_\omega)]^2}}. \qquad \text{(IX.6.27)}$$

Здесь $c' = \dfrac{c}{c_\tau}$; $c'_\omega = \dfrac{\omega b/(m\pi)}{c_\tau}$.

Таким образом, для данного типа волн существует условие распространения $\omega b/c_\tau < m\pi$. Наряду с фазовой скоростью эти волны характеризуются также групповой скоростью, которая выражается формулой

$$c_{\text{гр}} = \sqrt{1-(1/c'_\omega)^2}\, c_\tau, \qquad \text{(IX.6.28)}$$

или в безразмерном виде

$$c'_{\text{гр}} = \sqrt{1-1/(c'_\omega)^2}. \qquad \text{(IX.6.29)}$$

Формула групповой скорости получается при дифференцировании (IX.6.24) по параметру γ.

Продольные и изгибные нормальные волны. Из общего решения задачи следует, что если детерминант $\Delta_{\mathrm{III}} = 0$, то вектор смещения материала пластины определяется формулами:

$$\begin{aligned} u_x &= -(A\alpha \sin \alpha x - \gamma j F \sin \beta x)\, e^{j(\omega t - \gamma z)}; \\ u_z &= (\beta F \cos \beta x - j\gamma A \cos \alpha x)\, e^{j(\omega t - \gamma z)}, \end{aligned} \qquad \text{(IX.6.30)}$$

т. е. вектор смещения $\mathbf{u}$ антисимметричен относительно плоскости $X = 0$.

Опуская промежуточные преобразования, запишем окончательное уравнение, к которому приводится (IX.6.30):

$$\frac{\operatorname{tg} \beta b}{\operatorname{tg} \alpha b} = -\frac{4(\gamma b)^2 (\beta b)(\alpha b)}{[(\gamma b)^2 - (\beta b)^2]^2}. \qquad \text{(IX.6.31)}$$

Если $\Delta_{IV}=0$, то формула смещения для симметричной продольно-изгибной волны имеет вид, определяемый (IX.6.20). В этом случае после преобразования (IX.6.16) получаем дисперсионное уравнение

$$\frac{\operatorname{tg}\beta b}{\operatorname{tg}\alpha b}=\frac{[(\gamma b)^2-(\beta b)^2]^2}{4(\gamma b)^2(\beta b)(\alpha b)}. \qquad (IX.6.32)$$

Поскольку $\beta^2+\gamma^2=\omega^2/c_\tau^2$, $\alpha^2+\gamma^2=\omega^2/c_l^2$, т. е. $\frac{\beta^2+\gamma^2}{\alpha^2+\gamma^2}=\left(\frac{c_l}{c_\tau}\right)^2=$ $=\frac{2(1-\sigma)}{1-2\sigma}$, то полученные дисперсионные соотношения между γb и $\omega b/c_\tau$ рассматривают как уравнения с параметрами σ и называют их *дисперсионными уравнениями Рэлея — Лэмба.*

Для невзаимодействующих волн они имеют вид

$$\alpha^2+\gamma^2=\frac{\omega^2}{c_\tau^2}\frac{1}{K}, \quad \beta^2+\gamma^2=\frac{\omega^2}{c_\tau^2},$$

где $\alpha b=0,\ \pi/2,\ \pi,\ \ldots,\ q\pi/2$; $\beta b=0,\ \pi/2,\ \ldots,\ \frac{p\pi}{2}$, $K=c_l/c_\tau$. При мнимых значениях γb уравнение для α описывает последовательность окружностей, каждая из которых соответствует своему значению $q=0, 1, 2, \ldots$, уравнение для β соответствует эллипсам при $p=0, 1, 2, \ldots$

При действительных значениях γb первое уравнение описывает гиперболы с асимптотами $\omega b/c_\tau=K\gamma b$, где $K=c_l/c_\tau$ и зависит только от σ. Из этих уравнений получаются также две асимптоты, если положить $\alpha b=0$ и $\beta b=0$.

Если параметр γb — мнимый, то вместо волнового процесса наблюдаются колебания, которые имеют амплитуду, уменьшающуюся с увеличением z по экспоненциальному закону. Если $\gamma b=0$, то амплитуда смещения не зависит от z. Если $\beta b=0$ и $\alpha b=0$, как это следует из (IX.6.19) и (IX.6.20), то колебания не зависят от x.

Дисперсионные уравнения описывают все типы нормальных и других волн в изотропной пластине. В частности, если выделить только первую продольную и первую изгибную составляющие и взять предельное значение фазовой скорости при высокой частоте, то получим скорость рэлеевской волны. В пределе дисперсионное уравнение в этом случае совпадает с дисперсионным уравнением для рэлеевских волн.

Кроме скорости рэлеевских волн, примечательна еще скорость сдвиговых SV-волн в пластинах. Эту скорость называют скоростью волн Ламе:

$$c_Z=\sqrt{\frac{2\mu}{\rho}}=\sqrt{2}\,c_\tau.$$

Среди предельных волн имеется также пластиночная волна. Ее скорость равна пределу скорости первой продольной волны при наинизшей частоте:

$$c_{\text{пл}}=c_\tau\left(\frac{2}{1-\sigma}\right)^{1/2}.$$