§ IX.7. НОРМАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ В СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ

Вывод основного дисперсионного уравнения. При исследовании упругих нормальных волн воспользуемся представлением смещения через векторный и скалярный потенциалы и записью системы дифференциальных уравнений относительно потенциальных функций. Для решения задачи о распространении упругих волн в сплошном круговом цилиндре представим уравнения движения (IX.6.2) и (IX.6.3) в цилиндрических координатах r, θ, z. Условимся ось Z считать совпадающей с осью цилиндра. Предположим, что решения уравнений выражаются функциями:

$$\begin{aligned}
\Phi &= f(r) \begin{matrix}\sin n\theta \\ \cos n\theta\end{matrix}\, e^{j(\omega t-\gamma z)},\\
A_r &= h_r(r) \begin{matrix}\sin n\theta \\ \cos n\theta\end{matrix}\, e^{j(\omega t-\gamma r)},\\
A_\theta &= h_\theta(r) \begin{matrix}\sin n\theta \\ \cos n\theta\end{matrix}\, e^{j(\omega t-\gamma r)},\\
A_z &= h_z(r) \begin{matrix}\sin n\theta \\ \cos n\theta\end{matrix}\, e^{j(\omega t-\gamma r)}.
\end{aligned} \tag{IX.7.1}$$

После подстановки (IX.7.1) в уравнение движения (IX.6.2) получим уравнение для функции $f(r)$:

$$f'' + \frac{1}{r} f' + \left(\alpha^2 - \frac{h^2}{r^2}\right) f = 0. \tag{IX.7.2}$$

После замены переменной $x = \alpha r$ (IX.7.2) приводится к уравнению Бесселя:

$$f'' + \frac{1}{x} f' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right) f = 0.$$

Решением данного уравнения является $f(r) = AI_n(\alpha r) + BN_n(\alpha r)$. Так как $f(r)$ внутри цилиндра не может неограниченно возрастать, слагаемое с функцией Неймана $(BN(r)|_{r=0} = -\infty)$ должно быть отброшено. Поэтому

$$f(r) = A\mathscr{J}_n(\alpha r). \tag{IX.7.3}$$

Если бы рассматривалась задача о распространении упругих нормальных волн вдоль полого стержня, то необходимо было бы к этому решению добавить цилиндрическую функцию Неймана.

Для функции $h_z(r)$ дифференциальное уравнение имеет точно такой же вид, как и для функции $f(r)$:

$$h_z'' + \frac{1}{r} h_z' + \left(\beta^2 - \frac{h^2}{r^2}\right) h_z = 0, \tag{IX.7.4}$$

где $\beta^2 \geqslant \omega^2/c^2 - \gamma^2$.

Решением (IX.7.4) является также функция Бесселя порядка n:

$$h_z = B_3\mathscr{J}_n(\beta r). \tag{IX.7.5}$$

Для функций $h_r(\theta)$ и $h_\theta(\theta)$ получается система дифференциальных уравнений

$$h_r'' + \frac{1}{r} h_r' + \frac{1}{r^2}(-n^2 h_r + 2nh_l - h_r) + \frac{\omega^2}{c_\tau^2} h_r = 0,$$
$$h_\theta'' + \frac{1}{r} h_\theta' + \frac{1}{r^2}(-n^2 h_\theta + 2nh_\theta + h_\theta) + \frac{\omega^2}{c_\tau^2} h_\theta = 0. \qquad \text{(IX.7.6)}$$

Вычтем из второго уравнения (IX.7.6) первое:

$$\frac{d^2}{dr^2}(h_r - h_\theta) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(h_r - h_\theta) + \left[\beta^2 - \left(\frac{n+1}{r}\right)^2\right](h_r - h_\theta) = 0. \qquad \text{(IX.7.7)}$$

Затем произведем сложение этих уравнений:

$$\frac{d^2}{dr^2}(h_r + h_\theta) + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}(h_r + h_\theta) + \left[\beta^2 - \left(\frac{n-1}{z}\right)^2\right](h_r + h_\theta) = 0. \qquad \text{(IX.7.8)}$$

Уравнения (IX.5.7) и (IX.5.8) имеют решения в виде цилиндрических функций.

Отсюда следуют выражения для функций h_r и h_θ:

$$h_r = B_1 \mathscr{T}_{n-1}(\beta r) + B_2 \mathscr{T}_{n+1}(\beta r),$$
$$h_\theta = B_1 \mathscr{T}_{n-1}(\beta r) - B_2 \mathscr{T}_{n+1}(\beta r). \qquad \text{(IX.7.9)}$$

Как известно, произвольный вектор смещения определяется тремя константами. При использовании потенциальных функций имеем для определения вектора смещения четыре константы. Лишнюю константу можно положить равной нулю. Для удобства положим равной нулю постоянную B_1. На основании этого допущения получим

$$h_r = -h_\theta. \qquad \text{(IX.7.10)}$$

Следовательно, поле смещения в цилиндрическом упругом стержне выражается функциями:

$$u_r = (f' + nh_z/r + \gamma h_r) \cos n\theta \, e^{j(\omega t - \gamma z)},$$
$$u_\theta = (-nf/r + \gamma h_r - h_z') \cos n\theta \, e^{j(\omega t - \gamma z)}, \qquad \text{(IX.7.11)}$$
$$u_z = (-\gamma f + h_r' - (n+1) h_r r/r) \cos n\theta \, e^{j(\omega t - \gamma z)}.$$

Для составления дисперсионного уравнения воспользуемся условием, согласно которому на свободной поверхности цилиндра компоненты тензора напряжения равны нулю:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{r\theta} = 0. \qquad \text{(IX.7.12)}$$

Компоненты тензора напряжения связаны с компонентами тензора деформации законом Гука. В цилиндрической системе координат закон Гука выражается уравнениями:

$$\sigma_{rr} = \lambda\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}\right) + 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r},$$
$$\sigma_{\theta r} = \mu\left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}\right), \qquad \text{(IX.7.13)}$$
$$\sigma_{zz} = \mu\left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right).$$

Подставляя в (IX.7.13) функции u_r, u_θ, u_z из (IX.7.11), получаем:

$$\sigma_{zz}=\left\{-\lambda(\alpha^2+\gamma^2)f+2\mu\left[f''+\frac{n}{2}\left(h_z'-\frac{1}{r}h_z\right)+\gamma h_z'\right]\right\}\cos n\theta,$$

$$\sigma_{r\theta}=\mu\left[-\frac{2n}{r}\left(f'-\frac{1}{r}f\right)-(2h_z'-\beta^2 h_z)-\gamma\left(\frac{n+1}{r}h_r-h_r'\right)\right]\sin n\theta,$$

$$\sigma_{rz}=\mu\left\{-2\gamma f'-\frac{1}{r}n\left[h_z'-\left(\frac{n+1}{r}-\beta^2+\gamma^2\mu h_z\right)\right]-\frac{n\gamma}{r}h_z\right\}\cos n\theta.$$

Используя граничные условия (IX.5.12), получаем при $r=a$ следующую систему уравнений относительно постоянных A, B_2 и B_3:

$$\begin{aligned}a_{11}A+a_{12}B_1+a_{13}B_3&=0,\\ a_{21}A+a_{22}B_2+a_{23}B_3&=0,\\ a_{31}A+a_{32}B_2+a_{33}B_3&=0,\end{aligned}\qquad\text{(IX.7.14)}$$

где A, B_2 и B_3 — коэффициенты, входящие в формулы (IX.7.3), (IX.7.5) и (IX.7.9); a_{ik} — девять коэффициентов, определяющих дисперсионное уравнение, которые выражаются следующими формулами:

$$\begin{aligned}a_{11}&=\left[\frac{\lambda(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha a)^2}{2\mu\alpha^2}+(\alpha a)^2-n^2\right]\mathcal{J}_n(\alpha a)+\alpha a\mathcal{J}_n'(\alpha a),\\ a_{21}&=n\left[(\alpha a)\mathcal{J}_n'(\alpha a)-\mathcal{J}_n(\alpha a)\right],\\ a_{22}&=-n\left[\beta a\mathcal{J}_n'(\beta a)-\mathcal{J}_n(\beta a)\right],\\ a_{12}&=-\left[n^2-(\beta a)^2\right]\mathcal{J}_n(\beta a)-\beta a\mathcal{J}_n'(\beta a),\\ a_{23}&=-\left[2n^2-(\beta a)^2\right]\mathcal{J}_n(\beta a)+2(\beta a)\mathcal{J}_n'(\beta a),\\ a_{13}&=2n\left[(\beta a)\mathcal{J}_n'(\beta a)-\mathcal{J}_n(\beta a)\right],\\ a_{31}&=-(\alpha a)\mathcal{J}_n'(\alpha a),\\ a_{32}&=-\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma^2}(\beta a)\mathcal{J}_n'(\beta a),\quad a_{33}=n\mathcal{J}_n(\beta a).\end{aligned}\qquad\text{(IX.7.15)}$$

Условием существования независимых решений однородных уравнений (IX.7.14) является равенство нулю детерминанта:

$$|a_{ik}|=0.\qquad\text{(IX.7.16)}$$

Выражение (IX.7.16) представляет собой основное дисперсионное уравнение сплошного цилиндрического стержня, которое справедливо для всех целых $n\geqslant 0$. Уравнение (IX.7.16) определяет различные семейства нормальных волн. В частности, если $n=1$, то имеется семейство изгибных нормальных волн, аналогичное семейству изгибных волн в пластине. При $n\geqslant 2$ имеется семейство изгибных нормальных волн кругового порядка. Для $n=0$ дисперсионное уравнение сводится к произведению двух сомножителей — элемента второй строки третьего столбца и его минора. Первый сомножитель дает дисперсионное уравнение для крутильных волн, второй — дисперсионное уравнение для семейства продольных нормальных волн в твердом цилиндре.

Крутильные и продольные волны. Исследуем семейства крутильных волн. Оно получается из решения (IX.7.1), когда $n=0$. В этом случае отдельные коэффициенты a_{ik} (IX.7.15) упрощаются:

$$a_{11} = \left[\frac{\lambda(\alpha^2+\gamma^2)(\alpha a)^2}{2\mu\alpha^2} + (\alpha a)^2\right]\mathscr{J}_0(\alpha a) + \alpha a\,\mathscr{J}_0'(\alpha a),$$
$$a_{12} = (\beta a)^2\mathscr{J}_0(\beta a) - \beta a\mathscr{J}_0'(\beta a),$$
$$a_{23} = (\beta a)^2\mathscr{J}_0(\beta a) + 2\beta a\,\mathscr{J}_0'(\beta a), \quad a_{13}=0,$$
$$a_{21}=0,\ a_{31} = -(\alpha a)\mathscr{J}_0'(\alpha a),\ a_{32} = -\frac{\beta^2-\gamma^2}{2\gamma^2}(\beta a)\mathscr{J}_0'(\beta a),$$
$$a_{22}=0, \quad a_{33}=0$$

и дисперсионное уравнение (IX.7.16) сводится к следующему:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{vmatrix} = a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0. \qquad \text{(IX.7.17)}$$

Первый сомножитель содержит только параметр βa. Приравнивая его к нулю ($a_{23}=0$), получаем дисперсионное уравнение

$$(\beta a)^2\mathscr{J}_0(\beta a) + 2\beta a\,\mathscr{J}_0'(\beta a) = 0.$$

Воспользовавшись соотношением (известным из теории цилиндрических функций) $\mathscr{J}_0'(x) = -\mathscr{J}_1(x)$, получаем сокращенную запись:

$$\beta a\,\mathscr{J}_0(\beta a) = 2\mathscr{J}_1(\beta a). \qquad \text{(IX.7.18)}$$

Первые три корня уравнения (IX.7.18) имеют значения:

$$x_{01} = \beta_{01}a = 5{,}136;\ x_{02} = \beta_{02}a = 8{,}417;\ x_{03} = \beta_{03}a = 11{,}62. \qquad \text{(IX.7.19)}$$

В общем виде корни обозначают с помощью целочисленного индекса p. Например, p-й корень обозначим $\beta_{0p} = x_{0p}/a$. Целочисленный индекс p указывает на порядок волны, соответствующий дисперсионному уравнению (IX.7.18). Из всех нормальных волн смещения, выражаемых (IX.7.1) при $n=0$, остается только компонента векторного потенциала Ψ_θ, которая определяет крутильное смещение стержня:

$$u_\theta = -h_z' e^{j(\omega t - \gamma z)} = -B_3\frac{x_{0p}}{a}\cdot\mathscr{J}_1\left(x_{0p}\frac{r}{a}\right)e^{j(\omega t - \gamma z)}$$
$$(A = B_2 = 0,\ B_3 \neq 0).$$

Таким образом, амплитуда крутильных волн пропорциональна произведению $x_{0p}\mathscr{J}_1(x_{0p}r/a)$.

Между постоянной распространения γ для крутильных p-волн и волновым числом ω/c_τ чистого сдвига существует соотношение, которое используется в теории нормальных волн в пластине:

$$\gamma^2 + \beta_{0p}^2 = \omega^2/c_\tau^2.$$

В данном случае, выражая β_{0p} через корни (IX.7.19), получаем

$$(\gamma a) = \sqrt{\left(\frac{\omega a}{c_\tau}\right)^2 - (x_{0p})^2}.$$

На рис. IX.7.1 схематически представлены дисперсионные кривые первых трех мод круглого твердого волновода. Мода для $p=0$ соответствует прямой линии, проходящей через начало. Очевидно, для частот, удовлетворяющих неравенству $\omega a/c_\tau < x_{01} = 5{,}136$, крутильные волны возникнуть не могут.

Дисперсионное уравнение для крутильных волн имеет также другое простейшее решение: $\beta a = 0$, откуда следует $\beta = 0$.

Таким образом, простейшие крутильные сдвиговые волны выражаются формулой

$$A_z = Br^2 e^{j(\omega t - \gamma z)}, \quad u_\theta = Br e^{j(\omega t - \gamma z)}.$$

Среди множества крутильных волн в стержнях только волны низшего порядка не обладают дисперсией. Дисперсионная кривая для этих волн проходит через 0 под углом 45° и представляет собой прямую линию.

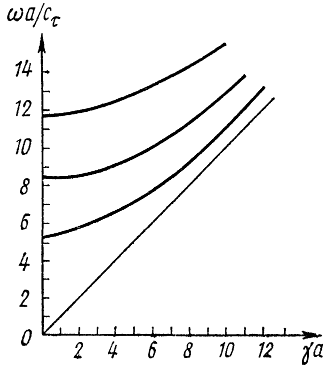

Рис. IX.7.1

Продольные волны в круглом стержне имеют две компоненты смещения: продольную u_z и сдвиговую u_r. Для этих волн отличны от нуля скалярный потенциал Φ и компонента векторного потенциала A_θ. Для продольных волн в прямом цилиндре легко получить дисперсионное уравнение из (IX.7.16):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12} = 0.$$

Подставляя в это уравнение из (IX.7.15) выражения для a_{11}, a_{12}, a_{31} и a_{32} при $n = 0$, получим дисперсионное уравнение для продольных нормальных волн в сплошном цилиндре (*уравнение Пахгаммера*):

$$\frac{2\alpha}{a}(\beta^2 + \gamma^2)\mathcal{J}_1(\alpha a)\mathcal{J}_1(\beta a) - (\beta^2 - \gamma^2)\mathcal{J}_0(\alpha a)\mathcal{J}_1(\beta a) - \\ - 4\gamma^2\alpha\beta\mathcal{J}_1(\alpha a)\mathcal{J}_0(\beta a) = 0. \qquad \text{(IX.7.20)}$$

Отметим некоторые свойства продольных волн в цилиндре.

1. При уменьшении частоты колебаний в цилиндре данного радиуса фазовая и групповая скорости продольной волны стремятся к общему пределу — фазовой скорости стержневых волн: $c = \sqrt{E/\rho}$.

2. При некотором значении коэффициента Пуассона (0,2833) для цилиндра частоты сдвигового и радиального продольного резонансов совпадают.

3. При изменении частоты фазовая скорость нормальной волны изменяется и с увеличением частоты приближается к фазовой скорости рэлеевской волны.

Смещение продольной волны состоит из смещений растяжения и сдвига. Отношение амплитуд этих смещений является функцией частоты.