ПРИЛОЖЕНИЯ

I. НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

1. Дифференциальное уравнение

$$(1-z^2)\,\omega' - 2z\omega' + m\,(m+1)\,\omega = 0$$

удовлетворяет функциям $\omega(z)$, однозначным и аналитичным для действительных значений $z = x \in (-1,\ 1)$.

Указанные функции имеют вид степенных рядов и называются *полиномами Лежандра* m-го порядка $P_m(x)$ (m — наивысшая степень многочлена). Они удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки:

$$\int\limits_{-1}^{+1} P_n(x)\,P_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq n, \\ \dfrac{2}{2m+1} & \text{при} \quad m = n. \end{cases}$$

Для полиномов $P_m(x)$ имеются следующие рекуррентные формулы:

$$P_{m+1}(x) = xP_m(x) + \frac{x^2-1}{m+1}\,P'_m(x),$$

$$P_m = \frac{1}{2^m m!}\,\frac{d^m}{dx^m}\,(x^2-1)^m.$$

Приведем первые пять полиномов Лежандра:

$$P_0(x) = 1;$$

$$P_1(x) = x = \cos\theta;$$

$$P_2(x) = (3x^2-1)/2 = (3\cos^2\theta + 1)/2;$$

$$P_3(x) = (5x^3 - 3x)/2; \quad P_4(x) = (35x^4 - 30x^2 + 3)/8;$$

$$P_5(x) = (63x^5 - 70x + 15x)/8.$$

Числовые значения полиномов Лежандра приведены в табл. П.II.1.

2. Функции $w(z)$, удовлетворяющие уравнению

$$(1-z^2)\,w'' - 2z\omega + \left[m\,(m+1) - \frac{n^2}{1-z^2}\right] w = 0,$$

называют *присоединенными полиномами Лежандра* степени m и порядка n. Для целых m и n функции $w(z)$ однозначны и аналитичны при $z = x \in (-1,\ 1)$ (x — действительная переменная). Эти функции удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки:

$$\int_{-1}^{+1} P_m^{(n)}(x)\, P_2^{(n)}(x)\, dx = \frac{2}{2m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!} \delta_{m,r}$$

$$(m,\ r=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

$$\delta_{m,r} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad m \neq r, \\ 1 & \text{при} \quad m = r, \end{cases}$$

$$\int_0^1 \left[P_m^{(n)}(x)\right]^2 dx = \frac{1}{2m+1} \frac{(m+n)!}{(m-n)!},$$

$$\int_0^1 \frac{\left[P_m^n(x)\right]^2}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2m} \frac{(m+n)!}{(m-n)!}$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

и могут быть получены с помощью рекуррентных формул

$$P_m^n = (1-x^2)^{n/2} \frac{d^n}{dx^n} P_m(x) = \frac{(1-x^2)^{n/2}}{2^m m!} \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} [(x^2-1)^m] = (-1)^{m+n} P_m^{(n)}(-x)$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Приведем первые шесть присоединенных функций Лежандра:

$$P_1^{(1)}(x) = \sqrt{1-x^2} = \sin\theta;$$

$$P_2^{(1)}(x) = 3x\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{2}\sin 2\theta;$$

$$P_2^{(2)}(x) = 3(1-x^2) = \frac{3}{2}(1-\cos 2\theta);$$

$$P_3^{(1)}(x) = \frac{3}{2}(5x^2-1)\sqrt{1-x^2} = \frac{3}{8}(\sin\theta - \cos 3\theta);$$

$$P_3^{(2)}(x) = 15\ (1-x^2) = 15/4 \cos\theta\,(\cos\theta - \sin 3\theta);$$

$$P_3^{(3)}(x) = 15\,(1-x^2)\sqrt{1-x^2} = 15/4\,(3\sin\theta - \sin 3\theta).$$

Кроме того,

$$P_m^{(m)}(x) = 1\cdot 3\cdot 5\ \ldots\ (2m-1)\,(1-x^2)^{m/2} = m!!\,(\sin\theta)^m$$

$$(m=0,\ 1,\ 2\ \ldots).$$

3. Цилиндрические функции $\omega(z) = Z_m(z)$ порядка m составляют решение уравнения Бесселя

$$\omega'' + \frac{1}{z}\omega' + \left(1 - \frac{m^2}{z^2}\right)\omega = 0$$

и могут быть получены на основании рекуррентных формул

$$Z_{m+1}(z) = \frac{2m}{z} Z_m(z) - Z_{m-1}(z) = \frac{m}{z} Z_m(z) - Z_m'(z) = -z^m \frac{d}{dz}[z^{-m} Z_m(z)].$$

Существует несколько видов цилиндрических функций:

$$\mathscr{J}_m(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(m+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$(|\arg| < \pi)$$

— функции Бесселя порядка m;

$$N_m(z) = \frac{1}{\sin m\pi}\left[\mathcal{J}_m(z)\cos m\pi - \mathcal{J}_m(z)\right],$$

$$N_m(z) = (-1)^m N_{-m}(z) = \frac{2}{\pi}\mathcal{J}_m(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,(m+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{l=1}^{k}\frac{1}{l} + \sum_{l=1}^{m+k}\frac{1}{l}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{\pi}\,\frac{z}{2}\right)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(m+k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots;\quad \arg z < \pi)$$

— функции Неймана порядка m;

$$H_m^{(1)}(z) = \mathcal{J}_m(z) + jN_m(z) = jC_m(z)\,e^{j\delta_m(z)} = jC_m(z)\left[\cos\delta_m + j\sin\delta_m\right],$$
$$\mathcal{J}_m(z) = -C_m(z)\sin\left[\delta_m(z)\right],\quad N_m = C_m\cos\left[\delta_m(z)\right]$$

$$\frac{dH_m^{(1)}(z)}{dz} = \mathcal{J}'_m(z) + jN'_m(z) = jC'_m(z)\,e^{j\delta'_m(z)}$$

—функции Ханкеля первого рода и их производные, где $C_m(z), C'_m(z)$ — модули функций и их производных.

$$C_m = \sqrt{\mathcal{J}_m^2 + N_m^2};\quad C'_m(z) = \sqrt{\mathcal{J}_m'^2 + N_m'^2};$$

$$\delta_m(z) = -\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{J}_m(z)}{N_m(z)};\quad \delta'_m(z) = -\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{J}'_m(z)}{N'_m(z)}$$

— фазы функций Ханкеля и их производные;

$$H_m^2(z) = \mathcal{J}_m(z) - jN_m(z) = -jC_m(z)\,e^{-j\delta_m(z)};$$

$$C_m(z) = \sqrt{\mathcal{J}_m^2(z) + N_m^2(z)};\quad \delta_m(z) = -\operatorname{arctg}\frac{\mathcal{J}_m(z)}{N_m(z)};$$

$$\frac{dH_m^2}{dz} = \mathcal{J}'_m(z) - jN'_m(z) = -jC'_m(z)\,e^{-j\delta_m(z)}$$

— функции Ханкеля второго рода и их производные.

Каждая цилиндрическая функция $Z_m(z)$ может быть представлена как линейная комбинация функций $\mathcal{J}_m(z)$ и $N_m(z)$ или $H_m^{(1)}(z)$ и $H_m^{(2)}(z)$:

$$Z_m(z) = a\mathcal{J}_m(z) + BN_m(z) = \alpha H_m^{(1)}(z) + \beta H_m^{(2)}(z).$$

Определители Вронского указанных систем равны:

$$W\{\mathcal{J}_m(z),\quad N_m(z)\} = \begin{vmatrix} \mathcal{J}_m(z) & N_m(z); \\ \dfrac{d}{dz}\mathcal{J}_m(z) & \dfrac{d}{dz}N_m(z) \end{vmatrix} = \frac{2}{\pi z} =$$

$$= C_m(z)\,C'_m(z)\sin\left[\delta_m(z) - \delta'_m(z)\right];$$

$$W\left\{H_m^{(1)}(z),\quad H_m^{(2)}(z)\right\} = \begin{vmatrix} H_m^{(1)}(z) & H_m'^{2}(z) \\ \dfrac{d}{dz}H_m^{(1)}(z) & \dfrac{d}{dz}H_m'^{2}(z) \end{vmatrix} = \frac{4j}{\pi z}.$$

4. Многие задачи математической физики приводят к цилиндрическим функциям полуцелого порядка. В этом случае в уравнении Бесселя $m = n + 1/2$, и его решение может быть представлено в виде линейной комбинации функций Бесселя полуцелого порядка $\mathcal{J}_{-m}(z)$ $(m=\pm 1/2, \pm 3/2, \pm 5/2, \ldots)$, которые выражают с помощью тригонометрических функций:

$$\mathcal{J}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin z, \quad N_{1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

$$\mathcal{J}_{1/2+k}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,z^{k+1/2}\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^{k}\frac{\sin z}{z}$$

$$(k=1,\ 2,\ \ldots)$$

или с помощью функций Ханкеля полуцелого порядка:

$$H^{(1)}_{1/2}(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{j}\,\frac{e^{jz}}{\sqrt{z}}; \quad H^{(2)}_{-1/2}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,j\,\frac{e^{-jz}}{\sqrt{z}}.$$

5. Решениями уравнения Бесселя при $m^2=n(n+1)$ являются сферические функции Бесселя первого — четвертого рода:

$$j_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,\mathcal{J}_{n+1/2}(z), \quad n_n(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,N_{n+1/2}(z),$$

$$h_n^{(1)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H_{n+1/2}(z), \quad h_n^{(2)}(z)=\sqrt{\frac{\pi}{2z}}\,H^{(2)}_{m+1/2}(z).$$

Сферические функции Бесселя нулевого порядка имеют вид:

$$j_0(z)=\frac{\sin z}{z}, \quad n_0(z)=-\frac{\cos z}{z}, \quad h_0^{(1)}(z)=-\frac{je^{jz}}{z}, \quad h_0^{(2)}(z)=\frac{je^{-jz}}{z}.$$

Сферические функции Бесселя любого порядка

$$j_m(z)=z^m\left(-\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^m\frac{\sin z}{z}, \quad n_m=(-1)^{m+1}j_{-m-1}(z),$$

$$h_m^{(1)}(z)=jD_m(z)\,e^{j\delta_m(z)}, \quad h_m^{(2)}(z)=-jD_m(z)\,e^{-j\delta_m(z)}.$$

Сферические функции Бесселя первого и второго рода выражают посредством модуля D_m и фазы $\delta_m(z)$:

$$j_m(z)=D_m(z)\sin\delta_m(z), \quad n_m(z)=D_m(z)\cos\delta_m(z).$$

То же относится к производным сферических функций:

$$j'_m(z)=-D'_m(z)\sin\delta'_m(z), \quad n'_m(z)=D'_m(z)\cos\delta'_m(z),$$

$$h_m^{(1)\prime}(z)=jD'_m(z)\,e^{j\delta'_m(z)}, \quad h_m^{(2)\prime}(z)=-jD'_m(z)\,e^{-j\delta'_m(z)}.$$

Сферические функции Бесселя удовлетворяют рекуррентным формулам:

$$w_{m+1}=-z^m\frac{d}{dz}\left[z^{-m}w_m(z)\right].$$

6. При $z\to\infty$ цилиндрические функции $\mathcal{J}_m(z)$ и $N_m(z)$ могут быть представлены в виде асимптотических разложений:

$$\mathcal{J}_m(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_m(z)\cos\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)-B_m(z)\sin\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

$$N_m(z)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_m(z)\cos\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+B_m(z)\sin\left(z-\frac{m\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right],$$

где

$$A_m(z) = 1 - \frac{[(2m)^2-1][(2m)^2-3^2]}{2!\,(8z)^2} +$$

$$+ \frac{[(2m)^2-1][(2m)^2-3^2][(2m)^2-5^2][(2m)^2-7^2]}{4!\,(8z)^4} +$$

$$\ldots + \frac{[(2m)^2-1][(2m)^2-3^2][(2m)^2-5^2]\ldots[(2m)^2-(2\cdot 2n-1)^2]}{2n!\,(8z)^{2n}} + \ldots,$$

$$B_m(z) = \frac{(2m)^2-1}{8z} - \frac{[(2m)^2-1][(2m)^2-3^2][(2m)^2-(2\cdot 3-1)^2]}{5!\,(8z)^5} - \ldots$$

$$+ \frac{[(2m)^2-1][(2m)^2-9]\ldots\{(2m)^2-[2(2n+1)^2-1]^2\}}{(2n+1)!\,(8z)^{2n-1}} + \ldots$$

Эти формулы дают предельные выражения функций Бесселя. Например,

$$\mathcal{J}_{m+1/2} \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin\left(z - \frac{m\pi}{2}\right),$$

$$h_m^{(1)}(z) \underset{z\to\infty}{\approx} (-1)^{m+1}\frac{1}{z}e^{jz}, \quad h_m^{(2)}(z) \underset{z\to\infty}{\approx} j^{m+1}\frac{1}{z}e^{-jz},$$

$$j_n(z) \approx \frac{1}{z}\cos\left(z - \frac{m+1}{z}\pi\right), \quad n_m(z) \approx \frac{1}{z}\sin\left(z - \frac{m+1}{2}\pi\right).$$

7. Функции Бесселя удовлетворяют условиям ортогональности и нормировки: если x_i и x_k — действительные корни функции $\mathcal{J}_m(x)$, то условия ортогональности и нормировки

$$\int_0^1 \mathcal{J}_m(x_i\varepsilon)\,\mathcal{J}_m(x_k\varepsilon)\,\varepsilon\,d\varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq k, \\ [\mathcal{J}'_m(x_i)]^2/2 & \text{при} \quad i = k. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\alpha\int_0^\infty \mathcal{J}_m(\alpha\varepsilon)\,\mathcal{J}_m(\beta\varepsilon)\,\varepsilon\,d\varepsilon = \delta(\alpha-\beta); \quad \delta = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{при} \quad \alpha = \beta. \end{cases}$$

Полезно иметь в виду *интегральные соотношения*:

$$\mathcal{J}_m(z) = \frac{(-j)^m}{\pi}\int_0^\pi e^{jz\cos t}\cos mt\,dt = \frac{j^m}{\pi}\int_0^t e^{-jz\cos t}\cos mt\,dt,$$

$$\mathcal{J}_m(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(mt - z\sin t)\,dt$$

$$(m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

интегральную формулу Бесселя:

$$\int_0^x \mathcal{J}_m(\alpha x)\,\mathcal{J}_m(\beta x)\,x\,dx = \frac{x}{\alpha^2-\beta^2}[\alpha\mathcal{J}_m(\beta x)\,\mathcal{J}_{m+1}(\alpha x) - \beta\mathcal{J}_m(\alpha x)\,\mathcal{J}_{m+1}(\beta x)] =$$

$$= \frac{x^2}{2}[\mathcal{J}'_m(\alpha x)]^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{m^2}{x^2}\right)[\mathcal{J}_m(\alpha x)]^2$$

и *интегралы Ломмеля*:

$$\int_0^x [\mathcal{J}_m(\alpha x)]^2\,x\,dx = \frac{x^2}{2}[\mathcal{J}'_m(\alpha x)]^2 + \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{m^2}{x^2}\right)[\mathcal{J}_m(\alpha x)]^2$$

$$(m > -1).$$

8. К полиномам Лежандра и цилиндрическим функциям применимы следующие теоремы сложения:

Теорема сложения для цилиндрических функций. Пусть P_1 и P_2 — точки плоскости с полярными координатами ρ_1, φ_1 и ρ_2, φ_2. Допустим, что $0 \leqslant |\psi| < \pi/2$ (рис. П.I.1). Тогда

$$\alpha = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)}; \quad e^{2j\psi} = \frac{\rho_1 - \rho_2 e^{-j(\varphi_1 - \varphi_2)}}{\rho_1 - \rho_2 e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)}}.$$

В этом случае для каждой цилиндрической функции $Z_m(\alpha d)$ выполняется соотношение

$$Z_m(\alpha d)\, e^{jm\psi} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_{m+k}(\alpha\rho_1)\, \mathscr{J}_k(\alpha\rho_2)\, e^{jk(\varphi_1 - \varphi_2)},$$

где α — произвольное комплексное число.

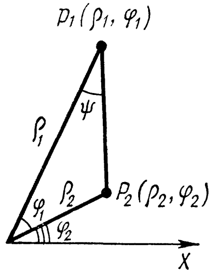

Рис. П.I.1

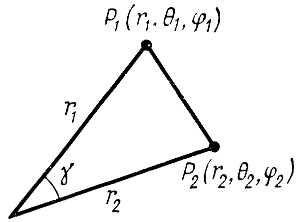

Рис. П.I.2

В частности, если $\varphi_1 - \varphi_2 = \pi$, то

$$Z_m[\alpha(\rho_1 + \rho_2)] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} Z_k(\alpha\rho_1)\, \mathscr{J}_{m-k}(\alpha\rho_1).$$

Теоремы сложения для сферических функций Бесселя и полиномов Лежандра. Пусть P_1 и P_2 — точки пространства со сферическими координатами r_1, θ_1, φ_1 и r_2, θ_2, φ_2. Допустим, что $\theta_1 + \theta_2 < \pi$ (рис. П.I.2). Тогда выполняются следующие соотношения:

$$d = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\gamma}, \quad \cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1),$$

$$j_0(\alpha d) = \frac{\sin\alpha d}{\alpha d} = \sum_{k=0}^{\infty} (2k+1)\, j_k(\alpha r_1)\, j_k(\alpha r_2)\, P_k(\cos\gamma)$$

$$h_0^{(1)} = \frac{e^{j\alpha d}}{j\alpha d} = \sum_{0}^{\infty} (2k+1)\, h_k^{(1)}(\alpha r_1)\, j_k(\alpha r_2)\, P_k(\cos\gamma) \quad (r_1 > r_2),$$

$$h_0^{(2)} = \frac{e^{-j\alpha d}}{-j\alpha d} = \sum_{0}^{\infty} (2k+1)\, h_k^{(2)}(\alpha r_2)\, j_k(\alpha r_1)\, P_k(\cos\gamma) \quad (r_1 < r_2).$$

Теорема сложения многочленов Лежандра. Полином Лежандра m-го порядка от $\cos\gamma = \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ может быть вычислен по формуле

$$P_m(\cos\gamma) = P_m(\cos\theta_1)\, P_m(\cos\theta_2) +$$

$$+ 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+1)!} P_m^{(n)}(\cos\theta_1) \cdot P_m^{(n)}(\cos\theta_2)\cos m(\varphi_1 - \varphi_2).$$