x	$D_6(x)$	$\delta_6(x)$, град	$D'_6(x)$	$\delta'_6(x)$, град	$D_7(x)$	$\delta_7(x)$, град	$D'_7(x)$	$\delta'_7(x)$, град
1,0	10881	00,00	75167	00,00	140453	00,00	1112740	00,00
1,2	3098,8	0,00	17733	0,00	33227	0,00	218416	0,00
1,4	1079,0	0,00	5254,7	0,00	9879,0	0,00	55372	0,00
1,6	435,72	0,00	1841,1	0,00	3475,1	0,00	16940	0,00
1,8	197,24	0,00	733,60	0,00	1391,1	0,00	5985,2	0,00
2,0	97,792	0,00	323,68	0,00	617,05	0,00	2370,4	0,00
2,2	52,238	0,00	155,17	0,00	297,64	0,00	1030,1	0,00
2,4	29,702	0,00	79,694	0,00	153,95	0,00	483,46	0,00
2,6	17,812	0,01	43,385	—0,01	84,491	0,00	242,16	0,00
2,8	11,189	0,01	24,827	0,01	48,802	0,00	128,25	0,00
3,0	7,3207	0,03	14,835	—0,03	29,476	0,00	71,282	0,00
3,2	4,9682	0,06	9,2059	0,06	18,521	0,00	41,335	0,00
3,4	3,4852	0,13	5,9066	0,11	12,057	0,01	24,884	—0,01
3,6	2,5202	0,23	3,9037	0,21	8,1040	0,02	15,489	0,02
3,8	1,8743	0,41	2,6493	0,38	5,6086	0,04	9,9334	0,03
4,0	1,4311	0,70	1,8415	—0,66	3,9878	0,07	6,5446	—0,06
4,2	1,1198	1,13	1,3083	1,09	2,9075	0,13	4,4184	0,12
4,4	0,8967	1,75	0,9486	1,73	2,1704	0,23	3,0499	0,22
4,6	0,7336	2,62	0,7015	2,65	1,6567	0,39	2,1483	0,37
4,8	0,6124	3,78	0,5290	3,92	2,2916	0,64	1,5417	0,61
5,0	0,5206	5,29	0,4072	—5,58	1,0276	1,00	1,1256	—0,98

x	$D_8(x)$	$\delta_8(x)$, град	$D'_8(x)$	$\delta'_8(x)$, град	$D_9(x)$	$\delta_9(x)$, град	$D'_9(x)$	$\delta'_9(x)$, град
2,0	4530,1	00,00	19768	00,00	37889	00,00	184915	00,00
2,2	1977,1	0,00	7790,5	0,00	14980	0,00	66113	0,00
2,4	932,47	0,00	3342,8	0,00	6451,1	0,00	25947	0,00
2,6	468,63	0,00	1541,1	0,00	2986,2	0,00	11016	0,00
2,8	250,25	0,00	755,58	0,00	1470,6	0,00	5001,8	0,00
3,0	140,06	0,00	390,70	0,00	764,20	0,00	2407,3	0,00
3,2	81,850	0,00	211,68	0,00	416,31	0,00	1219,1	0,00
3,4	49,707	0,00	119,52	0,00	236,48	0,00	645,82	0,00
3,6	31,246	0,00	70,012	0,00	139,45	0,00	356,11	0,00
3,8	20,265	0,00	42,388	0,00	85,051	0,00	203,55	0,00
4,0	13,523	0,01	26,440	—0,00	53,485	0,00	120,19	0,00
4,2	9,2642	0,01	16,944	—0,01	34,591	0,00	73,094	0,00
4,4	6,5027	0,02	11,131	0,02	22,954	0,00	45,665	0,00
4,6	4,6692	0,04	7,4788	0,04	15,599	0,00	29,242	0,00
4,8	3,4251	0,07	5,1305	0,07	10,839	0,01	19,156	0,00
5,0	2,5638	0,13	3,5874	—0,12	7,6895	0,01	12,815	—0,01

III. РЕШЕНИЕ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ В СФЕРИЧЕСКИХ КООРДИНАТАХ

Волновое уравнение

$$\Delta_{r,\theta,\varphi}U-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}$$

в переменных r, θ, φ, t для функции $U=ve^{j\omega t}$ можно привести к уравнению Гельмгольца:

$$\Delta_{r,\theta,\varphi}v+\frac{\omega^2}{c^2}v=0, \tag{1}$$

где $\Delta_{r,\theta,\varphi}$ — оператор Лапласа в сферической системе координат:

$$\Delta_{r,\theta,\varphi}=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}.$$

Умножая левую часть уравнения Гельмгольца на r^2 и обозначая

$$\Delta_r=\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right)+\frac{\omega^2}{c^2}r^2,\quad \Delta_{\theta\varphi}=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\varphi^2},$$

после подстановки решения в виде $v=R(r)\,Y(\theta,\ \varphi)$ получаем

$$\frac{\Delta_r R(r)}{R(r)}+\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y}=0,$$

или

$$\frac{\Delta_r R}{R}=-\frac{\Delta_{\theta,\varphi}Y}{Y}=\lambda.$$

Из этого следует, что функция $R(r)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta_r R-\lambda R=r^2R''+2rR'+\left(\frac{\omega^2}{c^2}r^2-\lambda\right)R=0,$$

а для определения $Y(\theta,\ \varphi)$ — уравнению

$$\Delta_{\theta,\varphi}Y+\lambda Y=\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+\lambda Y=0. \qquad (2)$$

Положив $Y=\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$, получаем уравнение для $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi''(\varphi)+\mu\Phi(\varphi)=0.$$

Из условия периодичности $\Phi(\varphi+2\pi)=\Phi(\varphi)$ следует, что уравнение для $\Phi(\varphi)$ имеет решение только при целом $\mu=n^2$. Линейно независимыми решениями являются функции $\sin\varphi$ и $\cos n\varphi$:

$$\Phi_{-n}=A_{-n}\cos n\varphi,\quad \Phi_n=A_n\sin n\varphi.$$

Функция $\Theta(\theta)$ определяется из уравнения

$$\frac{d}{d\theta}\frac{1}{(\sin\theta)}\left(\frac{d\Theta}{d\theta}\sin\theta\right)+\left(\lambda-\frac{n^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta=0$$

для условия ограниченности $\Theta(\theta)$ при $\theta\in 0,\ \pi n$.

Введем переменную $x=\cos\theta$ и обозначим $\Theta(\theta)=X(x)$. Тогда

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dX}{dx}\right]+\left(\lambda-\frac{n^2}{1-x^2}\right)X=0 \qquad (-1<x<1).$$

Уравнение допускает ограниченные решения только при $\lambda=m(m+1)$. Этими решениями являются присоединенные полиномы $P_m^{(n)}(x)$ при $n\leqslant m$.

Таким образом, функции $Y(\theta,\ \varphi)=X(\cos\theta)\,\Phi(\varphi)$ представляются в виде

$$Y_m^{(n)}(\theta,\ \varphi)=P_m^{(n)}(\cos\theta)\begin{matrix}\cos n\varphi\\ \sin n\varphi.\end{matrix}$$

Условимся приписывать положительный верхний индекс тем сферическим функциям m-го порядка, которые содержат $\cos n\varphi$, отрицательный — тем, которые содержат $\sin n\varphi$. Тогда

$n=0 \quad Y_m^{(0)}(\theta,\ \varphi)=P_m(\cos\theta)$,

$n=1 \quad Y_m^{(1)}(\theta,\ \varphi)=P_m^{(1)}(\cos\theta)\cos\varphi,\ Y_m^{(-1)}=P_m(\cos\theta)\sin\varphi$,

$n=2 \quad Y_m^{(2)}(\theta,\ \varphi)=P_m^{(2)}(\cos\theta)\cos 2\varphi,\ Y_m^{(-2)}=P_m^{(2)}(\cos\theta)\sin 2\varphi$,

. . . .

$n=k \quad Y_m^{(k)}(\theta,\ \varphi)=P_m^{(k)}(\cos\theta)\cos k\varphi,\ Y_m^{(-k)}(\theta,\ \varphi)=P_m^{(-k)}(\cos\theta)\sin k\varphi$,

т. е. имеем $2m+1$ различных сферических функций m-го порядка.

Линейная комбинация всех различных решений уравнения (2) является также решением этого уравнения:

$$Y_m(\theta, \varphi) = \sum_{n=0}^{m} (A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi) P_m^{(n)}(\cos\theta) = \sum_{n=-m}^{m} C_{mn} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi),$$

где $C_{mn} = \begin{cases} A_{mn} & \text{при} \quad n \leqslant 0, \\ B_{mn} & \text{при} \quad n > 0. \end{cases}$

Преобразуем уравнение к виду при условии $\lambda = m(m+1)$

$$R'' + \frac{2}{r} R' + \left[k^2 - \frac{m(m+1)}{r^2}\right] R = 0 \qquad \left(k = \frac{\omega}{c}\right).$$

С помощью подстановки $R(r) = Y(r)/\sqrt{r}$ получаем уравнение

$$Y'' + \frac{1}{r} Y' + \left[k^2 - \frac{(m+1/2)^2}{r^2}\right] = 0,$$

которое после замены переменной $r = z/k$ сводится к уравнению Бесселя полуцелого порядка:

$$\frac{d^2Y}{dz^2} + \frac{1}{z}\frac{dY}{dz} + \left[1 - \frac{(m+1/2)^2}{z^2}\right] Y = 0.$$

Решением этого уравнения являются цилиндрические функции полуцелого порядка $Y = Z_{m+1/2}(z)$. Таким образом,

$$R(r) = \frac{Y(r)}{\sqrt{r}} = \sqrt{\frac{k}{z}}\, Z_{m+1/2}(z) \qquad (z = kr).$$

При этом вид цилиндрической функции определяется так, чтобы выполнялись условия ограниченности функции при $z = 0$ и условия излучения на бесконечности.

Запишем частное решение волнового уравнения (1):

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{z}}\, Z_{m+1/2}(z) \sum_{n=-m}^{+m} C_{mn} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi).$$

Для внутренних краевых задач на сфере

$$Z_{m+1/2} = \mathscr{J}_{m+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\, j_m(z),$$

$$v_m = \sqrt{\frac{k}{z}} \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\, j_m(z) \sum_{n=-m}^{+m} C_{mn} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi) =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, j_m(z) \sum_{n=-m}^{+m} C_{mn} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi),$$

$$Z_{m+1/2} = \mathscr{J}_{m+1/2}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\, j_m(z) \qquad \left(\lambda = \frac{2\pi}{k}\right).$$

Если функции v_m не зависят от азимута φ, то

$$v_m = 2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, j_m(z) P_m(\cos\theta).$$

Для внешней краевой задачи функция $Z_{m+1/2}(z)$, удовлетворяющая условию излучения, есть *вторая цилиндрическая функция Ханкеля полуцелого порядка* $H_{m+1/2}^{(2)}(z)$, которая выражается через сферические функции Ханкеля второго рода с помощью формулы

$$H_{m+1/2}^{(2)}(z) = \sqrt{\frac{2z}{\pi}}\, h_m^{(2)}(z).$$

Таким образом, амплитудная функция для внешней краевой задачи имеет вид

$$v_m = 2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, h_m^{(2)}(z) \sum_{-m}^{m} C_{mn} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi) = 2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, h_m^{(2)}(z) \sum_{n=-m}^{m} C_{mn} P_m^{(n)}(\theta, \varphi) \frac{\cos}{\sin} n\varphi, \tag{3}$$

где числа $n \leqslant 0$ — для членов суммы, содержащих $\cos n\varphi$; $n > 0$ — для членов суммы, содержащих $\sin \varphi$.

Часто используется и другая формула частного решения (1):

$$v_m(kr, \theta, \varphi) = h_m^{(2)}(z) \sum_{n=0}^{m} A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi. \tag{4}$$

Общее решение задачи представляет собой сумму всех частных решений:

$$v = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^{+m} C_{mn}\, h_m^{(2)}\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) Y_m^{(n)}(\theta, \varphi), \tag{5}$$

или

$$v(kr, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} (A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi)\, P_m^{(n)}(\theta, \varphi)\, h_m^{(2)}(kr). \tag{6}$$

В частности, для симметричных (зональных) колебаний поверхности сферы функции v не зависит от φ:

$$v(kr, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} P_m(\cos\theta)\, h_m^{(2)}(kr). \tag{7}$$

Формулы (3)—(7) применимы к области, лежащей вне сферы ($a \leqslant r < \infty$). Функции $h_m^{(2)}(kr)$ удобно представить с помощью модуля $D_m(kr)$ и фазы $\delta_m(kr)$.

IV. ПРОИЗВОДНЫЕ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПОЛЕЙ

В декартовой системе координат XYZ

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\mathbf{k};$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k};$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}.$$

В цилиндрической системе $\rho\varphi Z$

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} e_z;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right) e_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial \rho}\right) e_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho A_\rho) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi}\right) e_\theta.$$

В сферической системе $r\varphi\theta$

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial r} e_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} e_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} e_\theta;$$

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}(A_\theta \sin\theta);$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(A_\varphi \sin\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi}\right)\right] e_z + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial (rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta}\right] e_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right] e_\theta.$$