Таким образом, амплитудная функция для внешней краевой задачи имеет вид

$$v_m = 2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, h_m^{(2)}(z) \sum_{-m}^{m} C_{mn} Y_m^{(n)}(\theta, \varphi) = 2\sqrt{\frac{1}{\lambda}}\, h_m^{(2)}(z) \sum_{n=-m}^{m} C_{mn} P_m^{(n)}(\theta, \varphi) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} n\varphi, \tag{3}$$

где числа $n \leqslant 0$ — для членов суммы, содержащих $\cos n\varphi$; $n > 0$ — для членов суммы, содержащих $\sin \varphi$.

Часто используется и другая формула частного решения (1):

$$v_m(kr, \theta, \varphi) = h_m^{(2)}(z) \sum_{n=0}^{m} A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi. \tag{4}$$

Общее решение задачи представляет собой сумму всех частных решений:

$$v = 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/2} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=-m}^{+m} C_{mn}\, h_m^{(2)}\left(\frac{2\pi}{\lambda} r\right) Y_m^{(n)}(\theta, \varphi), \tag{5}$$

или

$$v(kr, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{m} (A_{mn} \cos n\varphi + B_{mn} \sin n\varphi)\, P_m^{(n)}(\theta, \varphi)\, h_m^{(2)}(kr). \tag{6}$$

В частности, для симметричных (зональных) колебаний поверхности сферы функции v не зависит от φ:

$$v(kr, \theta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{m0} P_m(\cos\theta)\, h_m^{(2)}(kr). \tag{7}$$

Формулы (3)—(7) применимы к области, лежащей вне сферы ($a \leqslant r < \infty$). Функции $h_m^{(2)}(kr)$ удобно представить с помощью модуля $D_m(kr)$ и фазы $\delta_m(kr)$.

IV. ПРОИЗВОДНЫЕ СКАЛЯРНОГО И ВЕКТОРНОГО ПОЛЕЙ

В декартовой системе координат XYZ

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathbf{k};$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k};$$

$$\Delta\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}.$$

В цилиндрической системе $\rho\varphi Z$

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial\rho}\mathrm{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathrm{e}_\varphi + \frac{\partial\Phi}{\partial z}\mathrm{e}_z;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) + \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right)\mathrm{e}_\rho + \left(\frac{\partial A_\rho}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right)\mathrm{e}_\varphi + \left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho A_\rho) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right)\mathrm{e}_\theta.$$

В сферической системе $r\varphi\theta$

$$\operatorname{grad}\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial r}\mathrm{e}_r + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial\Phi}{\partial\varphi}\mathrm{e}_\varphi + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\mathrm{e}_\theta;$$

$$\operatorname{div}\mathbf{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(A_\theta\sin\theta);$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{A} = \left[\frac{1}{r\sin\theta}\left(A_\varphi\sin\theta - \frac{\partial A_\theta}{\partial\varphi}\right)\right]\mathrm{e}_z + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rA_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial\theta}\right]\mathrm{e}_\varphi +$$

$$+ \frac{1}{r}\left[\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial A_r}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial r}(rA_\varphi)\right]\mathrm{e}_\theta.$$