опытных данных. Вместе с тем, формулы и соотношения, которые принципиально не могут быть проверены на опыте, вообще не рассматриваются в теоретической физике. Все усилия теоретической физики, как и физики экспериментальной, направлены на выяснение объективно существующих связей, физических закономерностей природы.

Физическая теория, объясняющая известные, но не способная предсказать новые факты, всегда считается неудовлетворительной. С другой стороны, высшей оценкой правильности физической теории является экспериментальное подтверждение предсказанных ею фактов.

В свою очередь выяснение новых явлений, обнаруженных опытным путем, служит стимулом для дальнейшего развития теоретической физики. Таким образом, экспериментальная и теоретическая физика составляют единое и неразрывное целое.

§ 2. Нахождение векторного поля по его дифференциальным характеристикам

Мы увидим в дальнейшем, что состояние электромагнитного поля характеризуется заданием его векторных характеристик, — напряженностей электрического и магнитного полей. По этой причине при изложении общей теории и при решении конкретных задач в теории электромагнитного поля широко используется специфический математический аппарат, так называемый векторный анализ.

Описание электромагнитного поля, не опирающееся на аппарат векторного анализа, возможное в принципе, потребовало бы весьма громоздких выкладок и сложных преобразований. Поэтому дальнейшее изложение ведется исключительно на основе векторного анализа. Хотя мы предполагаем, что его основы известны читателю, в приложении I дан краткий вывод всех встречающихся формул и преобразований.

Мы разберем здесь один важный вопрос математической теории произвольного векторного поля. Значение этого вопроса для теории электромагнитного поля заключается в том, что общая расчетная схема теории поля строится по образу и подобию приводимого ниже расчета произвольного векторного поля.

Пусть во всем пространстве имеется векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Относительно поведения вектора $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ в бесконечно удаленных точках пространства будут сделаны некоторые допущения, о которых будет сказано ниже.

Предположим, что заданы интегральные характеристики поля — поток вектора $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}$ и циркуляция вектора $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l}$ в каждой точке пространства. Мы увидим в дальнейшем, что в случае электромагнитных полей именно эти характеристики векторного поля содержат величины, непосредственно измеряемые на опыте. Покажем, что если заданы указанные характеристики поля, то может быть найдено и само векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$. Если $\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int f(\boldsymbol{r})\, dV$, где $f(\boldsymbol{r})$ — известная функция координат, то на основании теоремы Гаусса — Остроградского

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \operatorname{div} \boldsymbol{a}\, dV = \int f(\boldsymbol{r})\, dV, \tag{2,1}$$

откуда, ввиду произвольного характера области интегрирования с объемом V, имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a} = f(\boldsymbol{r}). \tag{2,2}$$

Таким образом, задание потока вектора через замкнутую поверхность в каждой точке пространства эквивалентно заданию дивергенции этого вектора.

Далее, на основании теоремы Стокса,

$$\oint \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{l} = \int \operatorname{rot} \boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S} = \int \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})\, d\boldsymbol{S}, \tag{2,3}$$

где $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r})$ — известная векторная функция координат. Отсюда

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}). \tag{2,4}$$

Задание циркуляции вектора эквивалентно заданию его ротора.

Покажем, как можно найти векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$, если известны дивергенция и ротор вектора $\boldsymbol{a}$ во всем пространстве.

Разложим поле $\boldsymbol{a}$ на два поля: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2$, так, чтобы имели место соотношения:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}_1 = f(\boldsymbol{r}), \tag{2,5}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}_1 = 0, \tag{2,5$'$}$$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{a}_2 = 0, \tag{2,6}$$

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{a}_2 = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}). \tag{2,6$'$}$$

Векторное поле $\boldsymbol{a}_1$ является безвихревым; линии векторного поля $\boldsymbol{a}_1$ начинаются и заканчиваются в источниках и стоках, интенсивность которых определяется функцией $f(\boldsymbol{r})$. Векторное поле $\boldsymbol{a}_2$ не имеет источников и стоков и является соленоидальным полем.

Начнем с рассмотрения поля $\boldsymbol{a}_1$. Поскольку поле $\boldsymbol{a}_1$ не имеет вихрей, вектор $\boldsymbol{a}_1$ можно представить в виде градиента некоторой вспомогательной скалярной функции

$$\boldsymbol{a}_1 = \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}), \tag{2,7}$$

где $\varphi(\boldsymbol{r})$ — функция, именуемая скалярным потенциалом.

Подставляя уравнение (2,7) в (2,5), находим:

$$\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = f(\boldsymbol{r}),$$

или

$$\Delta\varphi = f(\boldsymbol{r}), \tag{2,8}$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ — оператор Лапласа. Уравнение в частных производных второго порядка (2,8) называется уравнением Пуассона. Его общее решение мы получим в § 24.

Здесь мы приведем лишь конечный результат и убедимся в том, что написанное решение удовлетворяет уравнению (2,8). Оказывается, что решение уравнения Пуассона имеет вид

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)\,dV_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{f(x_0, y_0, z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}, \tag{2,9}$$

где (x, y, z) — координаты точки наблюдения, т. е. той точки, в которой ищется значение функции φ, а x_0, y_0, z_0 — переменные интегрирования. Величина $|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0| = \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}$ представляет расстояние от точки $\boldsymbol{r}_0$ до точки наблюдения $\boldsymbol{r}$.

Подставляя (2,9) в (2,8), можно легко убедиться, что написанное выражение действительно удовлетворяет исходному уравнению

$$\Delta\varphi = -\Delta\frac{1}{4\pi}\int\frac{f(x_0, y_0, z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int f(x_0, y_0, z_0)\,dV_0\,\Delta\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} =$$

$$= \int f(x_0, y_0, z_0)\,\delta(x-x_0)\,\delta(y-y_0)\,\delta(z-z_0)\,dx_0\,dy_0\,dz_0 = f(x, y, z).$$

При этом мы воспользовались свойствами δ-функции и функции $\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|}$ (см. приложение III). Оператор Δ означает дифференцирование по координатам $\boldsymbol{r}$ и может быть внесен под знак интегрирования по координатам $\boldsymbol{r}_0$.

Если интегрирование ведется по всему пространству, для существования и сходимости интеграла (2,9) необходимо, чтобы подынтегральная функция $f(\boldsymbol{r}_0)$ удовлетворяла очевидному требованию

$$|f(\boldsymbol{r}_0)\cdot r_0^{2+\lambda}| < A \quad \text{при} \quad r_0 \to \infty, \tag{2,10}$$

где A — конечная величина и $\lambda > 0$. Иными словами, функция $f(\boldsymbol{r}_0)$ должна убывать при $r_0 \to \infty$ быстрее, чем функция $\frac{1}{r_0^2}$.

При выполнении этого условия интеграл (2,9) сходится, а функция $\varphi(r)$ убывает при неограниченном возрастании своего аргумента по закону

$$|\varphi(r)| < \frac{1}{r}. \qquad (2,11)$$

Если выполняется условие (2,10), мы можем утверждать, что (2,9) представляет решение уравнения (2,8).

Зная функцию $\varphi(\boldsymbol{r})$ и воспользовавшись определением (2,7), находим $\boldsymbol{a}_1$:

$$\boldsymbol{a}_1(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} \varphi(\boldsymbol{r}) = -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)\, dV_0}{|\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|}. \qquad (2,12)$$

Перейдем теперь к определению вектора $\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r})$. Векторное поле $\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r})$ имеет соленоидальный характер и, следовательно, вектор $\boldsymbol{a}_2$ может быть представлен в виде ротора некоторого вспомогательного вектора $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$:

$$\boldsymbol{a}_2 = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}). \qquad (2,13)$$

Векторная функция $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ получила название векторного потенциала, или вектора-потенциала.

Из определения (2,13) ясно, что уравнение (2,6) удовлетворено автоматически:

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = 0.$$

Для полного определения вектора-потенциала $\boldsymbol{A}$ нужно еще задать значение его дивергенции $\operatorname{div} \boldsymbol{A}$, которая пока остается произвольной. Положим

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0. \qquad (2,14)$$

Несколько ниже мы убедимся, что последнее допущение не ограничивает общности наших рассуждений. Подставляя (2,13) в (2,6′), имеем

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) - \Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}).$$

Учитывая условие (2,14), находим

$$\Delta \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = -\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}) \qquad (2,15)$$

или в скалярном виде

$$\Delta A_x = -\omega_x(\boldsymbol{r}),$$
$$\Delta A_y = -\omega_y(\boldsymbol{r}),$$
$$\Delta A_z = -\omega_z(\boldsymbol{r}).$$

Компоненты вектора-потенциала удовлетворяют тем же уравнениям, что и скалярный потенциал φ. Их решения гласят:

$$A_x = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_x(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0, \tag{2,16}$$

$$A_y = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_y(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0, \tag{2,16$'$}$$

$$A_z = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\omega_z(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0. \tag{2,16$''$}$$

Если функции ω_x, ω_y и ω_z удовлетворяют тем же условиям поведения на бесконечности, каким должна удовлетворять функция $f(\boldsymbol{r}_0)$ в (2,9), интегралы в выражениях (2,16)—(2,16″) сходятся. При этом формулы (2,16)—(2,16″) определяют вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$. Зная вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$, можно найти вектор $\boldsymbol{a}_2$ простым дифференцированием:

$$\boldsymbol{a}_2(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}) = \operatorname{rot} \frac{1}{4\pi} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0. \tag{2,17}$$

Также путем дифференцирования можно убедиться, что найденный вектор-потенциал удовлетворяет условию (2,14).

Таким образом, векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ полностью определяется по заданным во всем пространстве значениям его дивергенции $f(\boldsymbol{r}_0)$ и ротора $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)$:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 = \operatorname{grad}\varphi + \operatorname{rot}\boldsymbol{A} =$$

$$= -\frac{1}{4\pi} \operatorname{grad} \int \frac{f(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0 + \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \int \frac{\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{r}_0)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} dV_0. \tag{2,18}$$

Поскольку дивергенция и ротор вектора $\boldsymbol{a}$ однозначно связаны с потоком и циркуляцией этого вектора, можно также утверждать, что векторное поле $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{r})$ полностью определено потоком и циркуляцией этого вектора.

Остановимся еще на важном вопросе о возможности выбора $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ в виде (2,14). Определением (2,13) вектор-потенциал $\boldsymbol{A}$ задан неоднозначно. К нему можно прибавить градиент произвольной функции ψ, т. е. положить

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A} + \operatorname{grad}\psi. \tag{2,19}$$

Имеем, очевидно,

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}' = \operatorname{rot}\boldsymbol{A}.$$

Таким образом, прибавление к $\boldsymbol{A}$ градиента произвольной функции ψ приводит к прежнему значению вектора $\boldsymbol{a}$.

Пусть, в отличие от условия (2,14), $\operatorname{div}\boldsymbol{A} \neq 0$. Тогда всегда можно перейти к новому вектору-потенциалу $\boldsymbol{A}'$ по формуле (2,19). Для него имеем

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}' = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \operatorname{div}\operatorname{grad}\psi = \operatorname{div}\boldsymbol{A} + \Delta\psi.$$

Не ограничивая общности рассуждений, всегда можно выбрать произвольную функцию ψ так, чтобы при любом $\operatorname{div} A \neq 0$ имело место равенство

$$\Delta\psi = -\operatorname{div} A.$$

Это значит, что всегда можно считать

$$\operatorname{div} A' = 0$$

и, следовательно, условие (2,14) имеет совершенно общий характер.

Легко показать, наконец, что найденное выражение для a является единственным решением уравнений (2,2)—(2,4)[1].

Найденное нами выражение для векторного поля a, в зависимости от значений его дивергенции $f(r)$ и ротора $\omega(r)$, не связано с какими-либо допущениями о физическом смысле и характере рассматриваемых величин. Оно, вместе с тем, является прототипом тех вычислений, которые обычно приходится проделывать в теории электромагнитного поля для нахождения электрического и магнитного полей.

§ 3. Заряды и частицы

Согласно современным представлениям, в природе существуют так называемые элементарные частицы и системы, имеющие сложную структуру, и построенные из элементарных частиц — атомы и молекулы. Элементарные частицы и системы, состоящие из сравнительно небольшого числа элементарных частиц — отдельные атомы или молекулы, принято называть микрочастицами и микросистемами, тела, состоящие из большого числа атомов — макросистемами.

В настоящее время известно достаточно большое число элементарных частиц, более трех десятков. Взаимоотношения между элементарными частицами весьма далеки от простой схемы, принимавшейся в физике еще сравнительно недавно, когда были известны лишь две элементарные частицы — протон и электрон.

С основными свойствами микрочастиц и микросистем мы познакомимся в дальнейшем и главным образом в пятой части курса. Наиболее глубокие вопросы, касающиеся строения и свойств элементарных частиц, еще не выяснены в современной физике, а ряд установленных положений настолько сложен, что их изложение не может быть проведено в рамках этой книги.

В первой части книги будут рассмотрены некоторые свойства микрочастиц и микросистем в приближении классической

[1]) См., например, Н. Е. Кочин, Векторное исчисление и начала тензорного исчисления, Изд-во АН СССР, 1951, стр. 213.