

которое характеризуется полярным вектором, вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} является аксиальным или псевдовектором. Это видно из формулы (6,1) для силы Лоренца. Действительно, из определения напряженности по формуле (6,1) видно, что поведение вектора \mathbf{H} при отражении в начале координат $\mathbf{r} \rightarrow (-\mathbf{r})$ определяется поведением полярных векторов \mathbf{F} и \mathbf{v} и свойствами их векторного произведения. При замене $\mathbf{r} \rightarrow (-\mathbf{r})$ направления векторов \mathbf{F} и \mathbf{v} изменяются на обратные; знак векторного произведения также изменяется на обратный. Следовательно, при замене $\mathbf{r} \rightarrow (-\mathbf{r})$ вектор \mathbf{H} должен оставаться неизменным. Это свойство и является признаком аксиального вектора.

§ 7. Электромагнитное поле движущихся зарядов. Общий случай

Новые результаты получаются при рассмотрении нестационарного движения зарядов или, что то же самое, нестационарных токов в некоторых контурах.

Подчеркнем, прежде всего, что уравнение (6,3) не может оставаться справедливым для нестационарных токов (см. (6,4)): при нестационарных процессах закон сохранения заряда выражается формулой (5,3). Таким образом, соотношение (6,3) при нестационарных процессах противоречит закону сохранения заряда.

Важнейшим обстоятельством, принципиально отличающим нестационарные магнитное и электрическое поля от стационарных, является существование взаимосвязи между ними.

Фарадей обнаружил, что изменение во времени магнитного поля влечет за собой возникновение электрического поля (явление электромагнитной индукции). Максвелл теоретически предсказал, что изменение во времени электрического поля приводит к появлению магнитного поля. Это предсказание теории впоследствии нашло свое подтверждение в опытах Герца.

Опытами Фарадея было установлено, что изменение во времени потока вектора магнитного поля через произвольную поверхность S сопровождается появлением электродвижущей силы в контуре, стягивающем эту поверхность, т. е.

$$\oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} dS. \quad (7,1)$$

Коэффициент пропорциональности c оказался численно равным $3 \cdot 10^{10}$ см/сек, т. е. скорости света в пустоте. На рис. 2 схематически представлена связь между изменением магнитного поля $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$ и электродвижущей силой. Если линии поля вектора

$\frac{\partial H}{\partial t}$ изображаются прямыми линиями, идущими слева направо, то линии электрического поля представляют концентрические окружности, охватывающие соответствующие прямые. Направления векторов электрического поля E и $\frac{\partial H}{\partial t}$ показаны на рис. 2 стрелками.

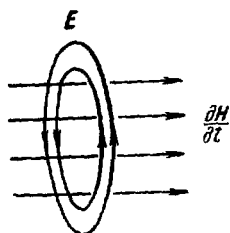


Рис. 2.

Формула (7,1) представляет обобщенный закон индукции Фарадея (1831 г.). Обобщение заключается в следующем: опытные данные Фарадея относились к контуру из проводочного (металлического) проводника. Возникновению в проводнике индуцированного электрического поля отвечает появление тока в контуре, который и измерялся непосредственно. В формуле (7,1) интегрирование ведется по совершенно произвольному контуру, никак не связанному с наличием проводников. Это означает, что первичным фактором является появления поля в контуре. Электрический ток — некоторое вторичное явление, связанное с конкретной природой контура — наличием в нем металлических свойств. Обобщенный закон индукции Фарадея в форме (7,1) устанавливает взаимосвязь между магнитным и электрическим полями. Знак в формуле (7,1) отвечает известному правилу Ленца.

Максвеллом была высказана гипотеза, впоследствии подтвердившаяся на опыте, что наряду с законом (7,1) имеет место аналогичное соотношение между изменением электрического поля во времени и магнитным полем.

Именно, при изменении потока электрического поля во времени $\frac{\partial}{\partial t} \int E dS$, в контуре, охватывающем поверхность S , возникает магнитодвижущая сила, равная

$$\oint H dl = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int E dS, \quad (7,2)$$

где коэффициент c имеет то же значение, что и в формуле (7,1). Рис. 3 иллюстрирует связь между изменением электрического поля, характеризуемым вектором $\frac{\partial E}{\partial t}$, и линиями магнитного поля. Если вектор $\frac{\partial E}{\partial t}$ в каждой точке поля представлен семейством прямых, то линии магнитного поля представляют концентрические окружности, охватывающие эти прямые.

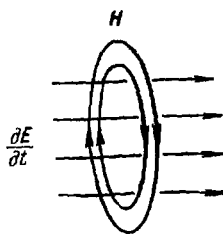


Рис. 3.

Мы отложим обсуждение соображений, которые приводят к установлению связи между изменением электрического поля и циркуляцией магнитного поля, до § 9. Что же касается связи закона (7,2) с опытными данными, то, как мы увидим ниже, оказывается, что с (7,2) связано существование электромагнитных волн.

Если кривая L , по которой вычисляется циркуляция магнитного поля, охватывает контур с электрическим током, то полная магнитодвижущая сила выражается формулой (см. (6,2) и (7,2))

$$\oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} \int \mathbf{j} d\mathbf{S} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{S}. \quad (7,3)$$

От формул (7,1) и (7,3), содержащих интегральные характеристики полей \mathbf{E} и \mathbf{H} , можно перейти к дифференциальным характеристикам. Именно, с помощью теоремы Стокса можно переписать (7,1) в виде

$$\int \text{rot } \mathbf{E} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{S} = -\frac{1}{c} \int \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} d\mathbf{S}. \quad (7,4)$$

При этом мы переменили порядок выполнения независимых операций дифференцирования по времени и интегрирования по фиксированной в пространстве поверхности (см., однако, ч. IV, § 23).

Ввиду произвольности поверхности интегрирования в формуле (7,4), из равенства интегралов вытекает равенство подынтегральных выражений:

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \quad (7,5)$$

Мы видим, что переменное во времени электрическое поле, в отличие от электростатического, имеет, вообще говоря, вихревой характер. Значение вихря вектора \mathbf{E} в данной точке определяется быстротой изменения во времени магнитного поля в той же точке.

Преобразуя совершенно аналогично интегральное соотношение (7,3), имеем

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}. \quad (7,6)$$

Последнее соотношение показывает, что вихри магнитного поля в каждой точке пространства определяются плотностью тока зарядов \mathbf{j} и изменением электрического поля во времени.

Бросается в глаза симметрия уравнений для вихрей электрического и магнитного полей, т. е. уравнений (7,5) и (7,6). Изменение магнитного поля сопровождается появлением вихревого электрического поля. Наоборот, изменение электрического поля связано с появлением вихревого магнитного поля. Однако,

наряду со сходством этих уравнений, между ними имеется и чрезвычайно важное различие; во-первых, уравнения (7,5) и (7,6) отличаются знаками перед производными по времени; во-вторых, в общем случае вихри магнитного поля зависят не только от быстроты изменения электрического поля, но и от плотности тока j . Между тем, не существует «магнитных зарядов», которые могут двигаться в пространстве и создавать «ток магнитных зарядов».

Уравнения (7,3) и (7,5) определяют вихри электрического и магнитного полей. Для однозначного определения полей должны быть заданы еще дивергенции электрического и магнитного полей.

Для определения последних найдем дивергенции от обеих частей уравнений (7,5) и (7,6). Начнем с последнего уравнения. Имеем

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = 0 = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c} \operatorname{div} \mathbf{j} + \frac{1}{c} \left(\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} \right).$$

С помощью закона сохранения заряда (5,3) последнее уравнение можно легко преобразовать к виду

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \mathbf{E} - 4\pi\rho) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho + f(\mathbf{r}),$$

где функция $f(\mathbf{r})$ — любая функция, зависящая только от координат, но не от времени.

Допустим, что в произвольный момент времени, который можно считать начальным, заряды покоились. Тогда в начальный момент должно было удовлетворяться уравнение электростатического поля (4,10), и функция $f(\mathbf{r})$ была равна нулю. Поскольку $f(\mathbf{r})$ не зависит от времени, это означает, что $f(\mathbf{r})$ всегда равна нулю. Дивергенция электрического поля как в нестационарных, так и в стационарных полях определяется формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi\rho. \quad (7,7)$$

Аналогично, беря дивергенцию от (7,5), находим

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{E} = 0 = \operatorname{div} \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}$$

или

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = f_1(\mathbf{r}).$$

Снова предполагая, что в начальный момент времени магнитное поле имело стационарный характер, и повторяя только что приведенное рассуждение, приходим к выводу:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0. \quad (7,8)$$

Магнитное поле как в стационарных, так и в нестационарных полях имеет число вихревой (соленоидальный) характер. Магнитных зарядов, на которых начинаются и заканчиваются линии магнитного поля, не существует ни в стационарных, ни в переменных полях.

§ 8. Система уравнений Максвелла — Лоренца

Полученная нами система уравнений (7,5)—(7,8) электромагнитного поля в вакууме носит название системы уравнений Максвелла—Лоренца. Она была установлена Максвеллом в 1873 г. для более общего случая электромагнитных полей в материальных средах и Лоренцем в 1895 г. для системы зарядов, движущихся в вакууме. Хотелся еще раз подчеркнуть, что уравнения Максвелла—Лоренца не вытекают из каких-либо более общих теоретических положений, но являются обобщенной записью наблюдавшихся на опыте фактов.

Выпишем еще раз уравнения Максвелла, объединив их в две пары:

Дифференциальная форма Интегральная форма

$$\text{I пара} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{l} = -\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{H} d\mathbf{S}; \quad (8,1) \\ \operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{S} = 0. \quad (8,2) \end{array} \right.$$

$$\text{II пара} \left\{ \begin{array}{l} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi \mathbf{j}}{c}, \quad \oint \mathbf{H} d\mathbf{l} = \frac{4\pi}{c} I + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \int \mathbf{E} d\mathbf{S}; \quad (8,3) \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi \rho, \quad \oint \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi e. \quad (8,4) \end{array} \right.$$

Считая известными распределения токов и зарядов, можно с помощью уравнений Максвелла найти шесть неизвестных компонент векторов поля \mathbf{E} и \mathbf{H} . Как мы видели в предыдущем параграфе, уравнения для дивергенции \mathbf{E} и \mathbf{H} следуют из уравнений для ротора и начальных условий. Поэтому в системе из восьми скалярных дифференциальных уравнений Максвелла имеется только шесть независимых уравнений.

Уравнение (8,1), представляющее обобщение закона индукции Фарадея, устанавливает, что изменение во времени магнитного поля порождает вихревое электрическое поле. Уравнение (8,2) показывает, что магнитное поле имеет соленоидальный характер и линии магнитного поля либо замкнуты, либо уходят на бесконечность.

Из уравнения (8,3) следует, что вихревое магнитное поле создается при движении зарядов и при изменении во времени электрического поля. По аналогии с электрическим током величину $\frac{1}{4\pi} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ называют током смещения, а сумму