§ 10. Потенциалы электромагнитного поля

В § 2 мы видели, что для нахождения стационарного векторного поля по заданным в каждой точке пространства значениям дивергенции и ротора удобно ввести вспомогательные величины, определенные соотношениями (2,7) и (2,13). Оказывается, что точно таким же образом можно поступить и в более общем случае нестационарной системы векторных полей — электрического и магнитного.

Вектор магнитного поля всегда является соленоидальным и его дивергенция равна нулю. Поэтому, как и в § 2, положим

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}, \tag{10,1}$$

где вспомогательный вектор $\boldsymbol{A}$ носит название вектора-потенциала. Вектор-потенциал $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ является функцией точки и времени. При этом уравнение (8,2) будет автоматически удовлетворено, поскольку при любом $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r}, t)$ имеет место

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \boldsymbol{A} = 0.$$

Подстановка соотношения (10,1) в (8,1) дает

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \operatorname{rot} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t},$$

или

$$\operatorname{rot}\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right) = 0.$$

Последнее уравнение показывает, что вектор $\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}\right)$ является потенциальным вектором, т. е. может быть представлен в виде

$$\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} = -\operatorname{grad} \varphi,$$

где φ — функция координат и времени, которую мы будем именовать скалярным потенциалом.

В отличие от случая электростатики, вектор электрического поля, имеющего вихревой характер, уже не может быть представлен в виде градиента какого-либо потенциала. Он выражается через совокупность скалярного и векторного потенциалов по формуле

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}, \tag{10,2}$$

причем второе слагаемое, связывающее электрическое поле с магнитными величинами, выражает закон электромагнитной индукции.

Для определения A и φ у нас остаются еще уравнения (8,3) и (8,4). Первое из них дает

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j,$$

или, по формуле (I, 50),

$$\operatorname{grad}\operatorname{div} A - \Delta A = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}j.$$

Перепишем последнее уравнение в виде

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}j + \operatorname{grad}\left(\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right). \qquad (10,3)$$

Уравнение (8,4) в свою очередь дает

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div} A. \qquad (10,4)$$

Потенциалы A и φ являются вспомогательными величинами, введенными для упрощения уравнений поля. Мы наложим на них такие условия, которые, не изменяя соотношений (10,1) и (10,2), позволят сделать уравнения (10,3) и (10,4) независимыми. Соотношение (10,1) определяет ротор вектора-потенциала A. Однако сам вектор-потенциал A еще не определен, поскольку его дивергенция не задана. Если задать дивергенцию A соотношением

$$\operatorname{div} A + \frac{1}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0, \qquad (10,5)$$

именуемым соотношением Лоренца, то (10,3) превратится в

$$\Delta A - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}j. \qquad (10,6)$$

Уравнение (10,4) получит совершенно аналогичную форму:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\rho. \qquad (10,7)$$

Найденные уравнения для электромагнитных потенциалов совершенно эквивалентны исходным уравнениям Максвелла. Если заданы распределения зарядов $\rho(r, t)$ и токов $j(r, t)$, удовлетворяющие уравнению непрерывности, то интегрирование уравнений (10,6) и (10,7) позволяет найти векторный и скалярный потенциалы. Векторы поля найдутся при этом путем дифференцирования по формулам (10,1) и (10,2).

Уравнение типа

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = \psi(r, t),$$

где $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ — заданная функция координат и времени, носит название уравнения Даламбера. Часто его записывают с помощью так называемого дифференциального оператора Даламбера:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

в более компактном виде:

$$\Box\varphi = \psi(\boldsymbol{r}, t).$$

В частном случае однородного уравнения при $\psi(\boldsymbol{r}, t) = 0$, из уравнения Даламбера получается так называемое волновое уравнение:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

В другом частном случае не зависящих от времени функций $\varphi(\boldsymbol{r})$ и $\psi(\boldsymbol{r})$ уравнение Даламбера превращается в уже известное (ср. (2,8)) из электростатики уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = \psi(\boldsymbol{r}).$$

С математической стороны уравнения второго порядка — уравнение Пуассона, волновое уравнение и уравнение Даламбера — проще, чем исходные уравнения Максвелла в частных производных первого порядка. Как мы увидим в дальнейшем, можно получить общее решение уравнения Даламбера и волнового уравнения в интегральной форме, как это сделано для уравнения Пуассона (ср. (2,9)). Именно по этой причине при исследовании свойств электромагнитных полей, а также и при решении ряда конкретных задач использование потенциалов весьма целесообразно, и метод потенциалов представляет основной расчетный аппарат теории поля.

§ 11. Калибровочная инвариантность потенциалов

Мы подчеркивали уже, что потенциалы $\boldsymbol{A}$ и φ представляют вспомогательные величины, не имеющие непосредственного физического смысла. Реальный смысл имеют напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ в каждой точке поля и в каждый момент времени. Эти величины могут быть определены по тем силам, которые действуют на пробный заряд, движущийся в поле.

Значения $\boldsymbol{A}$ и φ не могут быть измерены и потому сами по себе потенциалы не должны входить в какие-либо окончательные выражения теории поля. Действительно, определение потенциалов $\boldsymbol{A}$ и φ по формулам (10,1) и (10,2) является неоднозначным и допускает известный произвол.

Сейчас мы должны обсудить вопрос о степени произвола, существующей в определении потенциалов в общем случае.