где $\psi(\mathbf{r}, t)$ — заданная функция координат и времени, носит название уравнения Даламбера. Часто его записывают с помощью так называемого дифференциального оператора Даламбера:

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

в более компактном виде:

$$\Box\varphi = \psi(\mathbf{r}, t).$$

В частном случае однородного уравнения при $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$, из уравнения Даламбера получается так называемое волновое уравнение:

$$\Delta\varphi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0.$$

В другом частном случае не зависящих от времени функций $\varphi(\mathbf{r})$ и $\psi(\mathbf{r})$ уравнение Даламбера превращается в уже известное (ср. (2,8)) из электростатики уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = \psi(\mathbf{r}).$$

С математической стороны уравнения второго порядка — уравнение Пуассона, волновое уравнение и уравнение Даламбера — проще, чем исходные уравнения Максвелла в частных производных первого порядка. Как мы увидим в дальнейшем, можно получить общее решение уравнения Даламбера и волнового уравнения в интегральной форме, как это сделано для уравнения Пуассона (ср. (2,9)). Именно по этой причине при исследовании свойств электромагнитных полей, а также и при решении ряда конкретных задач использование потенциалов весьма целесообразно, и метод потенциалов представляет основной расчетный аппарат теории поля.

§ 11. Калибровочная инвариантность потенциалов

Мы подчеркивали уже, что потенциалы $\mathbf{A}$ и φ представляют вспомогательные величины, не имеющие непосредственного физического смысла. Реальный смысл имеют напряженности поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ в каждой точке поля и в каждый момент времени. Эти величины могут быть определены по тем силам, которые действуют на пробный заряд, движущийся в поле.

Значения $\mathbf{A}$ и φ не могут быть измерены и потому сами по себе потенциалы не должны входить в какие-либо окончательные выражения теории поля. Действительно, определение потенциалов $\mathbf{A}$ и φ по формулам (10,1) и (10,2) является неоднозначным и допускает известный произвол.

Сейчас мы должны обсудить вопрос о степени произвола, существующей в определении потенциалов в общем случае.

Из определения вектора-потенциала (10,1) следует, что если совершить преобразование

$$A \to A' + \operatorname{grad} \psi(r, t), \tag{11,1}$$

где $\psi(r, t)$ — произвольная фукнция кооординат и времени, то мы придем к тому же самому значению напряженности поля H:

$$H = \operatorname{rot} A = \operatorname{rot}(A' + \operatorname{grad} \psi(r, t)) = \operatorname{rot} A' + \operatorname{rot} \operatorname{grad} \psi = \operatorname{rot} A'.$$

Рассмотрим теперь определение скалярного потенциала φ, заданное формулой (10,2). Преобразование (11,1) приводит к значению

$$E = -\operatorname{grad} \varphi - \frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \psi}{\partial t} = -\operatorname{grad}\left(\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial A'}{\partial t}.$$

Производя замену

$$\varphi \to \varphi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \psi}{\partial t}, \tag{11,2}$$

мы приходим к прежнему выражению для напряженности электрического поля.

Таким образом, вектор-потенциал опеделен с точностью до вектора, представляющего градиент произвольной функции координат и времени $\psi(r, t)$, скалярный потенциал — с точностью до производной по времени от той же функции. В частиости, в случае электрического поля, не зависящего от времени, к потенциалу φ можно прибавить любую постоянную и прийти к прежнему значению напряженности поля $E = -\operatorname{grad}(\varphi + \mathrm{const}) = -\operatorname{grad} \varphi$.

В общем случае можно сказать, что два поля, описываемых системой потенциалов A' и φ' и, соответственно, A и φ, являются физически тождественными, если A и A', φ и φ' могут быть связаны между собой соотношениями (11,1) и (11,2). То же можно выразить следующими словами: уравнения электромагнитного поля неизменны (инвариантны) по отношению к преобразованиям (11,1) и (11,2).

Различные способы выбора потенциалов A и φ, оставляющие неизменными напряженности поля E и H, называются разными калибровками потенциалов. Инвариантность полей E и H и всех остальных соотношений теории поля по отношению к разным калибровкам именуется калибровочной (или градиентной) инвариантностью. Свойство калибровочной инвариантности позволяет, распоряжаясь до известной степени произвольно выбором электромагнитных потенциалов, подбирать их так, чтобы соотношения теории поля приобретали максимально простой вид.

Одним из примеров такого подбора может служить условие Лоренца, введенное в предыдущем параграфе.

Мы можем теперь показать, что условие Лоренца отвечает определенной калибровке потенциалов (калибровка Лоренца). Действительно, пусть для некоторых A_0 и φ_0 условие Лоренца не выполняется, так что

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi_0}{\partial t} = \chi(\boldsymbol{r}, t) \neq 0.$$

Произведем калибровочное преобразование (11,1) и (11,2):

$$\boldsymbol{A}_0 \to \boldsymbol{A} + \operatorname{grad} \psi,$$

$$\varphi_0 \to \varphi - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi}{\partial t}.$$

Тогда имеем

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \chi(\boldsymbol{r}, t) - \Delta\psi + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2}. \tag{11,3}$$

Если потребовать, чтобы функция ψ удовлетворяла уравнению Даламбера

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \chi(\boldsymbol{r}, t), \tag{11,4}$$

то для преобразованных потенциалов $\boldsymbol{A}$ и φ условие Лоренца будет выполняться. Мы упоминали уже, что уравнение Даламбера всегда имеет решение. Поэтому при заданном значении χ всегда можно подобрать функцию ψ, удовлетворяющую (11,4).

Следует подчеркнуть, что произвольная функция $\psi(\boldsymbol{r}, t)$ не определяется еще полностью уравнением (11,4). К ней можно прибавить функцию $\psi_0(\boldsymbol{r}, t)$, являющуюся решением однородного уравнения

$$\Delta\psi_0 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial t^2} = 0.$$

При этом, совершая преобразования

$$\boldsymbol{A} \to \boldsymbol{A}' + \operatorname{grad} \psi_0,$$

$$\varphi \to \varphi' - \frac{1}{c} \frac{\partial \psi_0}{\partial t},$$

мы приходим снова к тем же значениям напряженностей $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$:

$$\boldsymbol{H} = \operatorname{rot} \boldsymbol{A}',$$

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}'}{\partial t} - \operatorname{grad} \varphi',$$

а потенциалы $\boldsymbol{A}'$ и φ' будут удовлетворять условию Лоренца:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}' + \frac{1}{c} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

Поэтому, оставаясь в рамках калибровки Лоренца, можно подобрать функцию ψ так, чтобы выполнялось еще одно условие, налагаемое на одну из четырех величин: φ, A_x, A_y, A_z.

Наряду с калибровкой Лоренца, иногда (особенно в квантовой теории поля) пользуются другой, так называемой кулоновской калибровкой, при которой

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A} = 0.$$

При этой калибровке уравнение для потенциалов (уравнения (10,3) и (10,4)) приобретают вид

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$
$$\Delta \varphi = -4\pi\rho.$$

При кулоновской калибровке скалярный потенциал φ определяется распределением зарядов так, как будто бы они покоились. Само собой разумеется, напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, найденные из решений уравнений для потенциалов с кулоновской калибровкой и калибровкой Лоренца, совпадают. В рамках этой книги мы будем пользоваться, как правило, калибровкой Лоренца.

§ 12. Закон сохранения энергии в электромагнитном поле

Первым важным общим следствием, которое вытекает из системы уравнений Максвелла, является существование энергии электромагнитного поля. Для нахождения энергии электромагнитного поля рассмотрим замкнутую систему, состоящую из поля и частиц. Найдем работу W, произведенную силами поля над частицами, находящимися в объеме V. Относя эту работу к единице времени и считая заряды непрерывно распределенными в пространстве, пользуясь (8,8), мы можем написать

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dV = \int \rho\left(\boldsymbol{E} + \frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)\boldsymbol{v}\,dV &= \\ = \int \rho\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\,dV + \frac{1}{c}\int \rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\,\boldsymbol{v}\,dV &= \\ = \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV + \frac{1}{c}\int \rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]\,\boldsymbol{H}\,dV &= \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV. \qquad (12,1)\end{aligned}$$

Работа силы магнитного поля равна нулю, поскольку эта сила перпендикулярна к скорости частицы.

Преобразуем соотношение (12,1), используя уравнения Максвелла. Выражая плотность тока через векторы поля с помощью (8,3), имеем

$$\frac{dW}{dt} = \int \boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV = \frac{c}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,dV - \frac{1}{4\pi}\int \boldsymbol{E}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\,dV. \qquad (12,2)$$