Поэтому, оставаясь в рамках калибровки Лоренца, можно подобрать функцию ψ так, чтобы выполнялось еще одно условие, налагаемое на одну из четырех величин: φ, A_x, A_y, A_z.

Наряду с калибровкой Лоренца, иногда (особенно в квантовой теории поля) пользуются другой, так называемой кулоновской калибровкой, при которой

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0.$$

При этой калибровке уравнение для потенциалов (уравнения (10,3) и (10,4)) приобретают вид

$$\Delta\boldsymbol{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t}-\frac{1}{c}\operatorname{grad}\frac{\partial\varphi}{\partial t}=-\frac{4\pi}{c}\boldsymbol{j},$$
$$\Delta\varphi=-4\pi\rho.$$

При кулоновской калибровке скалярный потенциал φ определяется распределением зарядов так, как будто бы они покоились. Само собой разумеется, напряженности поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, найденные из решений уравнений для потенциалов с кулоновской калибровкой и калибровкой Лоренца, совпадают. В рамках этой книги мы будем пользоваться, как правило, калибровкой Лоренца.

§ 12. Закон сохранения энергии в электромагнитном поле

Первым важным общим следствием, которое вытекает из системы уравнений Максвелла, является существование энергии электромагнитного поля. Для нахождения энергии электромагнитного поля рассмотрим замкнутую систему, состоящую из поля и частиц. Найдем работу W, произведенную силами поля над частицами, находящимися в объеме V. Относя эту работу к единице времени и считая заряды непрерывно распределенными в пространстве, пользуясь (8,8), мы можем написать

$$\begin{aligned}\frac{dW}{dt}=\int\boldsymbol{F}\boldsymbol{v}\,dV=\int\rho\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\right)\boldsymbol{v}\,dV=\\=\int\rho\boldsymbol{E}\boldsymbol{v}\,dV+\frac{1}{c}\int\rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{H}]\,\boldsymbol{v}\,dV=\\=\int\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV+\frac{1}{c}\int\rho[\boldsymbol{v}\boldsymbol{v}]\,\boldsymbol{H}\,dV=\int\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV.\end{aligned}\quad(12,1)$$

Работа силы магнитного поля равна нулю, поскольку эта сила перпендикулярна к скорости частицы.

Преобразуем соотношение (12,1), используя уравнения Максвелла. Выражая плотность тока через векторы поля с помощью (8,3), имеем

$$\frac{dW}{dt}=\int\boldsymbol{j}\boldsymbol{E}\,dV=\frac{c}{4\pi}\int\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}\,dV-\frac{1}{4\pi}\int\boldsymbol{E}\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\,dV.\quad(12,2)$$

Как мы неоднократно подчеркивали, должна существовать симметрия между электрическим и магнитным полями. Между тем, уравнение (12,2) асимметрично. Мы можем придать ему должный вид, прибавив к правой его части выражение

$$-\frac{c}{4\pi}\int \boldsymbol{H}\left(\operatorname{rot}\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t}\right)dV,$$

равное, в силу уравнения Максвелла (8,1), нулю. Это дает

$$\frac{dW}{dt}=\int \boldsymbol{jE}\,dV=$$
$$=\frac{c}{4\pi}\int(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})\,dV-\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{E^2+H^2}{8\pi}\right)dV. \quad (12,3)$$

Первый интеграл в правой части уравнения (12,3) может быть преобразован к поверхностному. Именно, по формуле (I, 44) имеем

$$-(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})=\operatorname{div}[\boldsymbol{EH}].$$

Поэтому

$$\int(\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}-\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{E})\,dV=-\int\operatorname{div}[\boldsymbol{EH}]\,dV=-\oint[\boldsymbol{EH}]\,d\boldsymbol{S},$$

и вместо (12,3) можно написать

$$\frac{dW}{dt}=\int\boldsymbol{jE}\,dV=-\frac{c}{4\pi}\oint[\boldsymbol{EH}]\,d\boldsymbol{S}-\frac{\partial}{\partial t}\int\frac{E^2+H^2}{8\pi}\,dV. \quad (12,4)$$

Рассмотрим случай, когда объем интегрирования V неограниченно возрастает и охватывает все пространство. Если векторы поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ стремятся к нулю при $r\to\infty$ быстрее, чем по закону $\frac{1}{r}$, то поверхностный интеграл обращается в нуль. Действительно, подынтегральное выражение убывает быстрее, чем $\frac{1}{r^2}$, а величина поверхности растет, как r^2. Тогда (12,4) превращается в равенство

$$\frac{dW}{dt}=-\frac{d}{dt}\int u_0\,dV, \quad (12,5)$$

где обозначено

$$u_0=\frac{E^2+H^2}{8\pi}. \quad (12,6)$$

Поскольку в левой части (12,5) стоит работа, произведенная за 1 *сек*, правая часть представляет убыль энергии в единицу времени.

В замкнутой системе, состоящей из поля и частиц, работа, произведенная электромагнитным полем над частицами, равна убыли энергии самого поля. При этом электромагнитному полю необходимо приписать энергию, плотность которой u_0 выражается формулой (12,6). Выражение $u=\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}dV$ не может быть сведено к величинам, определяющимся только взаимным расположением и движением зарядов. Поэтому его нельзя считать потенциальной энергией системы взаимодействующих частиц. Плотность энергии поля, в частности, отлична от нуля в той области пространства, которая свободна от частиц.

Наличие у электромагнитного поля энергии наглядно показывает, что оно никоим образом не может рассматриваться как математическая фикция, как нечто, делающее удобным расчет взаимодействия между заряженными частицами. Напротив, поле обладает той же степенью реальности, что и частицы. В реальности электромагнитного поля мы будем неоднократно убеждаться и на основании других фактов. При этом, однако, в рамках классической электродинамики остается не ясным взаимоотношение между полем и зарядами. Только квантовая электродинамика, которая будет кратко изложена в части V этой книги, позволила более глубоко проникнуть в сущность взаимосвязи между полем и частицами.

Рассмотрим теперь область поля, имеющую конечный объем V и ограниченную поверхностью S. Тогда уравнение (12,4), выражающее закон сохранения энергии, показывает, что убыль энергии поля в единицу времени $\frac{\partial}{\partial t}\int \frac{E^2+H^2}{8\pi}dV$ в некотором объеме V равна работе сил поля $\frac{dW}{dt}$ в единицу времени над зарядами, заключенными в том же объеме, и потоку $\frac{c}{4\pi}\oint [EH]\,dS$, вытекающему через замкнутую поверхность S, окружающую объем V. Очевидно, что этот поток должен быть интерпретирован как поток энергии, вытекающей наружу из объема V. Поток энергии является потоком энергии электромагнитного поля, поскольку он отличен от нуля и тогда, когда никакие частицы не пересекают поверхность и не уносят с собой энергии. Поток энергии электромагнитного поля характеризуется вектором σ, именуемым вектором Пойнтинга и равным

$$\sigma=\frac{c}{4\pi}[EH]. \tag{12,7}$$

Вектор Пойнтинга σ представляет поток энергии поля, вытекающий через 1 *см*^{2} в направлении, перпендикулярном к векторам поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, и образует с ними правовинтовую систему координат.

В дальнейшем мы приведем ряд примеров вычисления вектора Пойнтинга. Здесь мы ограничимся лишь следующим замечанием. Формально вектор σ определен лишь с точностью до ротора некоторого вектора $\boldsymbol{a}$. Положив $\sigma' = \sigma + \operatorname{rot} \boldsymbol{a}$, имеем

$$\oint \sigma' \, dS = \oint \sigma \, dS + \oint \operatorname{rot} \boldsymbol{a} \, dS = \oint \sigma \, dS,$$

поскольку интеграл от ротора по замкнутой поверхности всегда равен нулю.

В действительности, однако, как будет показано в ч. II, σ следует интерпретировать как плотность потока энергии поля, положив $\operatorname{rot} \boldsymbol{a} = 0$. Иногда в качестве примера, опровергающего такую интерпретацию σ, приводят случай скрещенных статических электрического и магнитного полей. Формально в этом случае $\sigma \neq 0$, хотя никакого потока энергии нет. При этом, однако, забывают, что вектор σ должен входить в закон сохранения энергии, выражаемый формулой (12,4), а последняя теряет смысл в статических полях, если считать $\sigma \neq 0$.

При выводе формулы (12,5) мы считали, что интеграл $\oint \sigma \, dS$ при интегрировании по замкнутой поверхности бесконечно большого радиуса обращается в нуль. Мы увидим, что в проблемах теории излучения встречаются поля, убывающие с расстоянием по закону $|\boldsymbol{E}| \sim |\boldsymbol{H}| \sim \frac{1}{r}$ при $r \to \infty$. При этом интеграл $\oint \sigma \, dS$, взятый по бесконечно удаленной поверхности, будет иметь конечное значение. Физически это означает, что система, теряющая часть своей энергии, излучает.

Записав закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{E^2 + H^2}{8\pi} = -\boldsymbol{jE} - \operatorname{div} \sigma, \qquad (12,8)$$

обращаем внимание на аналогию его с уравнением непрерывности (8,5), выражающим закон сохранения заряда. В левой части формулы (12,8) стоит изменение энергии поля единицы объема (изменение сохраняющейся величины), в правой части — работа, поризведенная над зарядами, находящимися в этом объеме, а также дивергенция потока сохраняющейся величины (плотности энергии).

§ 13. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле

Наряду с плотностью энергии электромагнитное поле обладает и плотностью имплуьса.

Рассмотрим изменение импульса частиц, находящихся в объеме V. Вычисления производятся так же, как и при выводе закона сохранения энергии.