чанием. Формально вектор $\boldsymbol{\sigma}$ определен лишь с точностью до ротора некоторого вектора $\boldsymbol{a}$. Положив $\boldsymbol{\sigma}'=\boldsymbol{\sigma}+\operatorname{rot}\boldsymbol{a}$, имеем

$$\oint \boldsymbol{\sigma}'\, d\boldsymbol{S}=\oint \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{S}+\oint \operatorname{rot}\boldsymbol{a}\, d\boldsymbol{S}=\oint \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{S},$$

поскольку интеграл от ротора по замкнутой поверхности всегда равен нулю.

В действительности, однако, как будет показано в ч. II, $\boldsymbol{\sigma}$ следует интерпретировать как плотность потока энергии поля, положив $\operatorname{rot}\boldsymbol{a}=0$. Иногда в качестве примера, опровергающего такую интерпретацию $\boldsymbol{\sigma}$, приводят случай скрещенных статических электрического и магнитного полей. Формально в этом случае $\boldsymbol{\sigma}\neq 0$, хотя никакого потока энергии нет. При этом, однако, забывают, что вектор $\boldsymbol{\sigma}$ должен входить в закон сохранения энергии, выражаемый формулой (12,4), а последняя теряет смысл в статических полях, если считать $\boldsymbol{\sigma}\neq 0$.

При выводе формулы (12,5) мы считали, что интеграл $\oint \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{S}$ при интегрировании по замкнутой поверхности бесконечно большого радиуса обращается в нуль. Мы увидим, что в проблемах теории излучения встречаются поля, убывающие с расстоянием по закону $|\boldsymbol{E}|\sim|\boldsymbol{H}|\sim\frac{1}{r}$ при $r\to\infty$. При этом интеграл $\oint \boldsymbol{\sigma}\, d\boldsymbol{S}$, взятый по бесконечно удаленной поверхности, будет иметь конечное значение. Физически это означает, что система, теряющая часть своей энергии, излучает.

Записав закон сохранения энергии в дифференциальной форме

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{E^2+H^2}{8\pi}=-\boldsymbol{jE}-\operatorname{div}\boldsymbol{\sigma}, \qquad (12,8)$$

обращаем внимание на аналогию его с уравнением непрерывности (8,5), выражающим закон сохранения заряда. В левой части формулы (12,8) стоит изменение энергии поля единицы объема (изменение сохраняющейся величины), в правой части — работа, поризведенная над зарядами, находящимися в этом объеме, а также дивергенция потока сохраняющейся величины (плотности энергии).

§ 13. Закон сохранения импульса в электромагнитном поле

Наряду с плотностью энергии электромагнитное поле обладает и плотностью имплуьса.

Рассмотрим изменение импульса частиц, находящихся в объеме V. Вычисления производятся так же, как и при выводе закона сохранения энергии, В силу уравнения (8,8), имеем

$$\frac{dP_{\text{част}}}{dt} = \frac{d}{dt}\int p_0\,dV = \int \rho\left(E + \frac{1}{c}[vH]\right)dV =$$
$$= \int \rho E\,dV + \int \frac{1}{c}[jH]\,dV, \qquad (13,1)$$

где $P_{\text{част}}$ — полный импульс частиц. Выражая ρ и j через напряженности поля согласно (8,4) и (8,3), находим

$$\frac{d}{dt}P_{\text{част}} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int E\,\mathrm{div}\,E\,dV - \frac{1}{4\pi c}\int\left[\frac{\partial E}{\partial t}H\right]dV + \frac{1}{4\pi}\int[\mathrm{rot}\,H\cdot H]\,dV. \qquad (13,2)$$

Симметризуем последнее уравнение, прибавив к правой части его равное нулю выражение

$$\frac{1}{4\pi}\left[\left(\mathrm{rot}\,E + \frac{1}{c}\frac{\partial H}{\partial t}\right)E\right] + \frac{1}{4\pi}H\,\mathrm{div}\,H. \qquad (13,3)$$

Тогда имеем

$$\frac{d}{dt}P_{\text{част}} = -\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\int[EH]\,dV +$$
$$+ \frac{1}{4\pi}\int\{E\,\mathrm{div}\,E + H\,\mathrm{div}\,H - [E\,\mathrm{rot}\,E] - [H\,\mathrm{rot}\,H]\}\,dV. \qquad (13,4)$$

Второй интеграл может быть преобразован в поверхностный. Это преобразование мы проведем ниже. Ясно, что поверхностный интеграл, содержащий векторы поля во второй степени, будет стремиться к нулю при неограниченном возрастании поверхности, если только векторы поля убывают быстрее, чем функция $\frac{1}{r}$. Тогда, переходя к бесконечно большому объему и отбрасывая в (13,4) второй интеграл, мы приходим к выражению

$$P_{\text{част}} + \frac{1}{4\pi c}\int[EH]\,dV = \mathrm{const}. \qquad (13,5)$$

Формула (13,5) показывает, что суммарный импульс замкнутой системы, состоящий из поля и частиц, сохраняется. Величина

$$g = \frac{1}{4\pi c}[EH] \qquad (13,6)$$

представляет плотность импульса (импульс единицы объема) электромагнитного поля. При взаимодействии поля и частиц наряду с законом сохранения суммарной энергии имеет место закон сохранения суммарного импульса. Передача импульса частицам сопровождается уменьшением импульса поля. Потеря импульса частицами (например, при излучении) приводит к увеличению импульса поля.

Покажем теперь, что второй интеграл в форме (13,4) можно свести к поверхностному интегралу. Поскольку интеграл

$$\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]-[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}]\}\,dV$$

симметричен относительно векторов $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$, рассмотрим только интеграл

$$I=\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\}\,dV. \tag{13.7}$$

Воспользовавшись векторными равенствами (I, 53) и (I, 48), можем написать

$$\int (\boldsymbol{E}\operatorname{grad})\boldsymbol{E}\,dV=\oint(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\boldsymbol{E}\,dS-\int \boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}\,dV, \tag{13,8}$$

$$\int (\boldsymbol{E}\operatorname{grad})\boldsymbol{E}\,dV=\int \operatorname{grad}\frac{E^2}{2}\cdot dV-\int [\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\,dV. \tag{13,9}$$

Вычитая (13,9) из (13,8), находим

$$\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]\}\,dV=-\int \operatorname{grad}\frac{E^2}{2}\,dV+\int(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\boldsymbol{E}\,dS.$$

Учитывая (I, 23), получаем

$$I=\oint\left\{(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\,\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}\frac{E^2}{2}\right\}dS.$$

Аналогичное выражение можно написать для магнитной части интересующего нас интеграла. Таким образом, окончательно

$$\int \{\boldsymbol{E}\operatorname{div}\boldsymbol{E}-[\boldsymbol{E}\operatorname{rot}\boldsymbol{E}]+\boldsymbol{H}\operatorname{div}\boldsymbol{H}-[\boldsymbol{H}\operatorname{rot}\boldsymbol{H}]\}\,dV=$$
$$=\oint\left\{(\boldsymbol{E}\boldsymbol{n})\boldsymbol{E}-\boldsymbol{n}\frac{E^2}{2}+(\boldsymbol{H}\boldsymbol{n})\boldsymbol{H}-\boldsymbol{n}\frac{H^2}{2}\right\}dS. \tag{13,10}$$

Устремив к бесконечности радиус поверхности интегрирования и считая, что поля $\boldsymbol{E}$ и $\boldsymbol{H}$ убывают на бесконечности быстрее, чем $\frac{1}{r}$, приходим к высказанному ранее утверждению о равенстве нулю всего поверхностного интеграла.

Мы не будем останавливаться на рассмотрении более сложного случая, когда интегрирование в (13,4) *ведется по конечному объему*[1].

---

[1]) См. Р. Беккер, Электронная теория, ОНТИ, 1936: И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966 и, особенно, Я. И. Френкель, Электродинамика, ГТТИ, 1934, стр. 235, где дана более полная интерпретация выражения (13,6).

Укажем лишь результат такого рассмотрения: изменение полного импульса поля в некотором объеме $\int \boldsymbol{g}\,dV$ равно изменению импульса частиц, находящихся в этом объеме, и потоку импульса через поверхность, ограничивающую выделенный объем.

Предсказание теории о существовании импульса поля впервые было обнаружено в 1901 г. П. Н. Лебедевым, наблюдавшим экспериментально световое давление. Импульс электромагнитного поля в обычных условиях мал, и его величина часто лежит за пределами погрешностей измерений. Однако в области атомных явлений импульс электромагнитного поля становится сравнимым с импульсом частиц и играет первостепенную роль во всех процессах взаимодействия излучения с веществом. Давление излучения играет весьма существенную роль в процессах, происходящих внутри звезд и в звездных атмосферах, и других явлениях астрономического масштаба.

Интересно отметить, что между вектором плотности импульса $\boldsymbol{g}$ и вектором Пойнтинга существует соотношение

$$\boldsymbol{g} = \frac{1}{c^2}\boldsymbol{\sigma}. \qquad (13,11)$$

В главе, посвященной теории относительности, мы увидим, что между энергией и импульсом существует весьма общее соотношение, из которого формула (13,9) получается как следствие.

Наряду с вектором плотности импульса поля $\boldsymbol{g}$ можно ввести в рассмотрение плотности момента импульса:

$$\boldsymbol{k}_0 = [\boldsymbol{r}\boldsymbol{g}] = \frac{1}{4\pi c}[\boldsymbol{r}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]].$$

Момент импульса поля в объеме V равен

$$\boldsymbol{k} = \frac{1}{4\pi c}\int [\boldsymbol{r}[\boldsymbol{E}\boldsymbol{H}]]\,dV.$$

Можно показать, что для момента импульса, так же как для энергии и импульса, имеет место закон сохранения. Момент импульса электромагнитного поля играет большую роль в процессах атомного масштаба. В явлениях макроскопического масштаба момент импульса был измерен сравнительно недавно[1].

[1]) И. Е. Тамм, Основы теории электричества, «Наука», 1966.