ГЛАВА II

ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

§ 14. Электростатическое поле

Сформулировав общие уравнения электромагнитного поля и выяснив основные вытекающие из них следствия, можно перейти к обсуждению различных частных случаев электромагнитных полей. При этом мы будем последовательно переходить от простейших к более сложным случаям.

Самым простым примером электромагнитного поля является поле неподвижных зарядов.

Выпишем уравнения Максвелла для этого случая.

Дифференциальная форма		Интегральная форма	
$\operatorname{div} \boldsymbol{E} = 4\pi\rho,$	(14,1)	$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{S} = 4\pi \sum e_i,$	(14,1′)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{E} = 0,$	(14,2)	$\oint \boldsymbol{E}\, d\boldsymbol{l} = 0,$	(14,2′)
$\operatorname{div} \boldsymbol{H} = 0,$	(14,3)	$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{S} = 0,$	(14,3′)
$\operatorname{rot} \boldsymbol{H} = 0,$	(14,4)	$\oint \boldsymbol{H}\, d\boldsymbol{l} = 0.$	(14,4′)

Система уравнений электромагнитного поля в этом случае распадается на систему независимых уравнений для электрического и магнитного полей. Решение системы уравнений для магнитного поля, не зависящего от времени, имеет тривиальный вид:

$$\boldsymbol{H} = 0. \tag{14,5}$$

Это означает, что неподвижные заряды не окружены магнитным полем. Электрическое поле, связанное с неподвижными зарядами, имеет, как мы уже указывали, безвихревой характер. Его источниками и стоками служат заряды.

На практике чаще всего требуется найти распределение электрического поля, если известно распределение плотности заряда в пространстве $\rho(\boldsymbol{r})$. Для этого необходимо проинтегрировать систему дифференциальных уравнений (14,1) и (14,2) при заданной функции $\rho(\boldsymbol{r})$. Это — так называемая прямая задача электростатики.

Несравненно более простой, но реже встречающейся, является обратная задача электростатики — нахождение плотности заряда $\rho(\boldsymbol{r})$ по заданному распределению поля $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})$. Для решения обратной задачи электростатики, согласно (14,1), достаточно найти дивергенцию заданного поля.

Как мы уже указывали в § 4, для нахождения общего решения уравнений электростатического поля удобно воспользоваться методом электростатического потенциала. Согласно (4,11) или (10,2), можно положить

$$\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi. \tag{14,6}$$

При этом из (14,1) получаем уравнение Пуассона:

$$\Delta\varphi = -4\pi\rho.$$

Уравнение (14,2) будет автоматически удовлетворено введением потенциала по формуле (14,6), поскольку при произвольном виде функции $\varphi(\boldsymbol{r})$ имеет место равенство

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

Следовательно, уравнения Максвелла для электростатического поля (14,1) и (14,2) полностью эквивалентны уравнению Пуассона. Зная его решение — скалярный потенциал $\varphi(\boldsymbol{r})$, можно путем дифференцирования определить напряженность поля $\boldsymbol{E}$.

Подчеркнем, что физический смысл имеет только напряженность поля $\boldsymbol{E}$. Скалярный потенциал является лишь вспомогательной величиной, хотя и весьма удобной. Значение потенциала определено в электростатике с точностью до произвольной постоянной: прибавляя к потенциалу φ любую постоянную a, мы приходим к потенциалу $\varphi' = \varphi + a$, который отвечает полю $\boldsymbol{E} = -\operatorname{grad} \varphi' = -\operatorname{grad} \varphi$. Это преобразование является частным случаем преобразования калибровки, рассмотренного в § 11. В силу неполной определенности потенциала не имеет никакого смысла говорить о численном значении потенциала φ в данной точке поля.

В дальнейшем, рассматривая решения уравнения Пуассона, а также обсуждая другие свойства потенциала, мы будем предполагать определенное поведение потенциала φ на бесконечности. Если считать, что все заряды расположены в конечной области пространства, окружающей точку, условно выбранную за начало координат, то при $r \to \infty$ напряженность поля должна убывать не медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$. Соответственно этому, решения уравнения Пуассона должны удовлетворять требованию:

$$\varphi \to 0 \text{ при } r \to \infty. \tag{14,7}$$

С математической стороны уравнение Пуассона, представляющее уравнение в частных пориводных второго порядка, в некотором отношении удобнее и проще для расчета, чем уравнения поля (14,1) и (14,2), представляющие уравнения в частных производных первого порядка. Если потенциал φ на бесконечности удовлетворяет условию (14,7), то решеиие уравнения Пуассона может быть написано в общем виде.

В § 2 было приведено без доказательства (оно будет дано в § 24) общее решение уравнения (14,6):

$$\varphi(\boldsymbol{r}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{R} = \int \frac{\rho(\boldsymbol{r}')\,dV'}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} =$$

$$= \int \frac{\rho(x', y', z')\,dx'\,dy'\,dz'}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}. \tag{14,8}$$

Зная распределение плотности заряда в пространстве $\rho(x', y', z')$ и интегрируя по всему пространству, можно найти значение φ в любой точке (x, y, z).

Фактический расчет поля по формуле (14,8), требующий вычисления трехкратного интеграла, часто оказывается практически невыполнимым. Ниже, в ч. IV, мы кратко обсудим основные методы решения задач электростатики с учетом особенностей физических тел — диэлектриков и металлов. Здесь же мы ограничимся лишь простейшей системой — системой точечных зарядов.

§ 15. Электростатическое поле системы точечных зарядов

«Размазывание» зарядов по пространству и описание свойств системы зарядов при помощи непрерывной функции $\rho(\boldsymbol{r})$ дало нам возможность перейти от интегрального соотношения (14,1′) к дифференциальному уравнению (14,1). Важность такого перехода ясна из того, что он позволил сформулировать дифференциальные уравнения поля. Тем не менее в некоторых случаях недопустимо пренебрегать точечной структурой системы зарядов в реальных условиях. Кроме того, в ряде случаев оказывается удобным производить выкладки для точечных, а не для распределенных систем.