

убывать не медленнее, чем $\frac{1}{r^2}$. Соответственно этому, решения уравнения Пуассона должны удовлетворять требованию:

$$\varphi \rightarrow 0 \text{ при } r \rightarrow \infty. \quad (14,7)$$

С математической стороны уравнение Пуассона, представляющее уравнение в частных производных второго порядка, в некотором отношении удобнее и проще для расчета, чем уравнения поля (14,1) и (14,2), представляющие уравнения в частных производных первого порядка. Если потенциал φ на бесконечности удовлетворяет условию (14,7), то решение уравнения Пуассона может быть написано в общем виде.

В § 2 было приведено без доказательства (оно будет дано в § 24) общее решение уравнения (14,6):

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{r}) &= \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{R} = \int \frac{\rho(\mathbf{r}') dV'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \\ &= \int \frac{\rho(x', y', z') dx' dy' dz'}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}}. \quad (14,8) \end{aligned}$$

Зная распределение плотности заряда в пространстве $\rho(x', y', z')$ и интегрируя по всему пространству, можно найти значение φ в любой точке (x, y, z) .

Фактический расчет поля по формуле (14,8), требующий вычисления трехкратного интеграла, часто оказывается практически невыполнимым. Ниже, в ч. IV, мы кратко обсудим основные методы решения задач электростатики с учетом особенностей физических тел — диэлектриков и металлов. Здесь же мы ограничимся лишь простейшей системой — системой точечных зарядов.

§ 15. Электростатическое поле системы точечных зарядов

«Размазывание» зарядов по пространству и описание свойств системы зарядов при помощи непрерывной функции $\rho(\mathbf{r})$ дало нам возможность перейти от интегрального соотношения (14,1') к дифференциальному уравнению (14,1). Важность такого перехода ясна из того, что он позволил сформулировать дифференциальные уравнения поля. Тем не менее в некоторых случаях недопустимо пренебрегать точечной структурой системы зарядов в реальных условиях. Кроме того, в ряде случаев оказывается удобным производить выкладки для точечных, а не для распределенных систем.

Представим плотность заряда, характеризующую систему точечных зарядов, в виде

$$\rho = \sum e_i \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_i),$$

где \mathbf{r}'_i — радиус-вектор заряда e_i . Подставляя это выражение в (14,8), находим потенциал поля системы точечных зарядов

$$\varphi = \int \frac{\rho dV}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \sum e_i \int \frac{\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'_i)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|} dV' = \sum \frac{e_i}{R_i}, \quad (15,1)$$

где $R_i = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'_i|$, \mathbf{r} — радиус-вектор точки наблюдения. При этом мы воспользовались основным свойством дельта-функции (см. III, 3). Таким образом, решением уравнения

$$\Delta\varphi = -4\pi e\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \quad (15,2)$$

служит функция

$$\varphi = \frac{e}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}. \quad (15,3)$$

Формула (15,3) представляет полезное соотношение, которым мы будем пользоваться в дальнейшем.

Поле системы точечных зарядов дается формулой

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi = \sum \frac{e_i}{R_i^3} \mathbf{R}_i. \quad (15,4)$$

В случае одного заряда формула (15,4) дает

$$\mathbf{E} = \frac{e}{R^3} \mathbf{R}, \quad (15,5)$$

и для силы, действующей на пробный заряд e , помещенный в поле одиночного заряда, получается закон Кулона:

$$F = \frac{ee}{R^2} \mathbf{R}. \quad (15,6)$$

Если число зарядов в системе велико, суммы в формулах (15,1) и (15,4) содержат большое число членов и эти формулы становятся мало пригодными для практических расчетов. Однако формула (15,1) допускает существенное упрощение на таких расстояниях от системы, которые намного превышают ее собственную пространственную протяженность. Расстояния, большие по сравнению с размерами системы, в дальнейшем будем кратко называть большими расстояниями. Если точка наблюдения N находится на больших расстояниях от системы, то имеет место неравенство (рис. 5)

$$|\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'_i|.$$

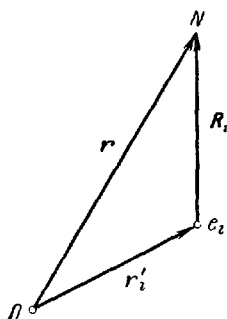


Рис. 5.

Рассмотрим одно из слагаемых в формуле (15,1). Для того чтобы не загромождать дальнейших формул индексами, мы не будем выписывать знак суммы и напомним расстояние от i -го заряда до точки наблюдения в виде

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{|r - r'_i|} = \frac{1}{\sqrt{(x - x'_i)^2 + (y - y'_i)^2 + (z - z'_i)^2}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{\alpha=1}^3 (x_\alpha - x'_{i\alpha})^2}}, \quad (15,7)$$

где индексом α отмечены три компоненты соответствующих векторов. Поскольку $|x'_{i\alpha}| \ll |x_\alpha|$, разлагая (15,7) в ряд Тейлора, имеем

$$\frac{1}{R_i} = \frac{1}{|r - r'_i|} = \frac{1}{r} - \sum_{\alpha} x'_{i\alpha} \left\{ \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) \right\}_0 + \dots \quad (15,8)$$

Подставляя разложение (15,8) в формулу (15,1), находим

$$\begin{aligned} \Phi &= \frac{\sum_i e_i}{r} - \sum_{\alpha} \left(\sum_i e_i x'_{i\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right) + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_i e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) + \dots = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \dots, \quad (15,9) \end{aligned}$$

где обозначено

$$\Phi_0 = \frac{\sum_i e_i}{r} = \frac{e}{r}, \quad (15,10)$$

$$\Phi_1 = - \sum_{\alpha} \left(\sum_i e_i x'_{i\alpha} \right) \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r} \right), \quad (15,11)$$

$$\Phi_2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left(\sum_i e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \right) \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (15,12)$$

Суммирование по i ведется по всем зарядам системы. Поэтому $\sum_i e_i = e$ представляет полный заряд системы.

Мы видим, что на больших расстояниях отношение двух последовательных членов разложения потенциала по порядку величины равно отношению $\frac{\text{размер системы}}{\text{расстояние до точки наблюдения}}$. Первый

член разложения φ_0 совпадает с потенциалом поля, создаваемым в данной точке N зарядом e , равным суммарному заряду системы. Каждый последующий член разложения содержит возрастающую степень отношения величины, пропорциональной размерам системы ($\sim |x'|$), к расстоянию до точки наблюдения ($|r|$).

В случае электронейтральной системы ее полный заряд $e = \sum e_i = 0$, и первый член ряда (15,9) исчезает. С такими системами мы будем иметь дело очень часто. Достаточно указать, например, что все атомы и молекулы являются электронейтральными системами. Потенциал поля, создаваемого электронейтральной системой зарядов, дается разложением (15,9), которое начинается со второго члена φ_1 . Рассмотрим его более подробно. Запишем φ_1 в векторном виде:

$$\varphi_1 = - \left(\sum_i e_i x'_{ia} \right) \frac{\partial}{\partial x_a} \left(\frac{1}{r} \right) = - \sum_i e_i \left(\nabla \frac{1}{r} \right) \mathbf{r}'_i = - \left(\text{grad} \frac{1}{r} \right) \sum_i e_i \mathbf{r}'_i, \quad (15,13)$$

где градиент берется по координатам точки наблюдения. Величина

$$\mathbf{d} = \sum e_i \mathbf{r}'_i = \int \rho \mathbf{r}' dV' \quad (15,14)$$

носит название дипольного момента системы. В частном случае системы, состоящей из двух равных по величине и противоположных по знаку зарядов, именуемой диполем, дипольный момент равен

$$\mathbf{d} = e_1 \mathbf{r}'_1 + e_2 \mathbf{r}'_2 = |e| (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2),$$

т. е. равен произведению величины заряда на вектор $\mathbf{l} = (\mathbf{r}'_1 - \mathbf{r}'_2)$.

Поле электронейтральной системы в первом приближении (именуемом дипольным приближением) запишется в виде

$$\varphi \approx \varphi_1 = - \mathbf{d} \left(\nabla \frac{1}{r} \right) = \frac{d \mathbf{r}}{r^3} = \frac{d \cos \theta}{r^2}, \quad (15,15)$$

где θ — угол между дипольным моментом и радиусом-вектором, проведенным в точку наблюдения. Таким образом, потенциал поля электронейтральной системы убывает (на больших расстояниях от системы) по закону $\varphi \sim \frac{1}{r^2}$.

Подобно тому как от точечных зарядов мы перешли к заряду, непрерывно распределенному в пространстве с плотностью ρ , можно ввести понятие плотности дипольного момента \mathbf{p} , непрерывно распределенной в пространстве. По определению, \mathbf{p} представляет дипольный момент единицы объема. По-

тенциал поля, создаваемого всей системой, можно, очевидно, написать в виде

$$\varphi = - \int p \nabla \left(\frac{1}{r} \right) dV',$$

где $(p dV' \nabla \frac{1}{r})$ — потенциал, создаваемый в точке N дипольным моментом, заключенным в объеме dV' , и интегрирование ведется по всему объему системы. Заметим еще, что часто вместо дифференцирования по координатам точки наблюдения пользуются дифференцированием по координатам источника. Тогда согласно (1, 18) имеем $\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = - \nabla' \left(\frac{1}{r} \right)$ и вместо (15,15) можем написать

$$\varphi = d \nabla' \frac{1}{r} \quad (15,16)$$

или

$$\varphi = \int p \nabla' \frac{1}{r} dV'. \quad (15,17)$$

Последняя формула понадобится нам в дальнейшем (см. ч. IV).

Рассмотрим вопрос о зависимости дипольного момента от выбора начала координат. Предположим, что мы сместим начало координат на произвольный постоянный вектор \mathbf{a} , т. е. совершим преобразование:

$$\mathbf{r}'_i = \mathbf{r}''_i + \mathbf{a}.$$

При этом дипольный момент будет равен

$$\mathbf{d} = \sum e_i \mathbf{r}'_i = \sum e_i \mathbf{r}''_i + \sum e_i \mathbf{a} = \mathbf{d}' + \mathbf{a} \sum e_i,$$

где $\mathbf{d}' = \sum e_i \mathbf{r}''_i$. Если система в целом электронейтральна, то $\sum e_i = 0$ и $\mathbf{d}' = \mathbf{d}$. В этом случае величина дипольного момента не изменяется при переносе начала координат. Если, наоборот, система обладает полным зарядом, то $\mathbf{d}' \neq \mathbf{d}$, следовательно, дипольный момент системы зависит от выбора начала координат. При этом всегда можно найти такое значение \mathbf{a} , чтобы дипольный момент обратился в нуль. Таким образом, дипольный момент всякой системы, обладающей полным зарядом, следует считать равным нулю.

Определим теперь поле электронейтральной системы в дипольном приближении:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= - \text{grad } \varphi \approx - \text{grad } \varphi_1 = - \text{grad } \frac{d\mathbf{r}}{r^3} = \\ &= - \frac{1}{r^3} \text{grad } (d\mathbf{r}) - (d\mathbf{r}) \text{grad } \frac{1}{r^3}. \end{aligned}$$

Вычисление по формулам (1, 47) дает

$$E = \frac{3r(rd) - r^2d}{r^5}. \quad (15,18)$$

Поле электронейтральной системы на далеких расстояниях убывает по закону $E \sim \frac{1}{r^3}$ и обладает резко выраженной асимметрией. В полярных координатах (r, θ) его слагающие (согласно I, 71) имеют вид

$$E_r = -\frac{\partial\varphi}{\partial r} = \frac{2d \cos \theta}{r^3} - \text{радиальная слагающая,}$$

$$E_\theta = -\frac{1}{r} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} = \frac{d \sin \theta}{r^3} - \text{меридиональная слагающая.}$$

§ 16. Квадрупольный момент

Если дипольный момент электронейтральной системы зарядов равен нулю, в разложении потенциала (15,9) следует учитывать член разложения φ_2 .

Примером электронейтральной системы с дипольным моментом, равным нулю, может служить система из двух равных по величине диполей, с противоположными направлениями дипольных моментов, находящихся на бесконечно малом расстоянии друг от друга. Такая система носит название квадруполь.

Потенциал поля, создаваемого квадруполем, имеет вид

$$\varphi \approx \varphi_2 = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{\alpha, \beta} e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (16,1)$$

Для получения φ следует вычислить выражение

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} \left(\frac{1}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} \frac{1}{r} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{x_\beta}{r^3} = \\ &= -x_\beta \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \left(\frac{1}{r^3} \right) - \frac{1}{r^3} \frac{\partial x_\beta}{\partial x_\alpha} = -\frac{1}{r^3} \delta_{\alpha\beta} + \frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5}, \end{aligned}$$

где $\delta_{\alpha\beta}$ — символ Кронекера, α, β принимают значения 1, 2, 3; x_α, x_β — сокращенная запись координат $x_1 = x; x_2 = y; x_3 = z$. Тогда имеем

$$\varphi_c = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \sum_i e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta} \left(\frac{3x_\alpha x_\beta}{r^5} - \frac{\delta_{\alpha\beta}}{r^3} \right).$$

Совокупность величин $(e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta})$ является тензором второго ранга. Этот тензор называют квадрупольным моментом системы и обозначают $D_{\alpha\beta}$:

$$D_{\alpha\beta} = \sum_i e_i x'_{i\alpha} x'_{i\beta}. \quad (16,2)$$